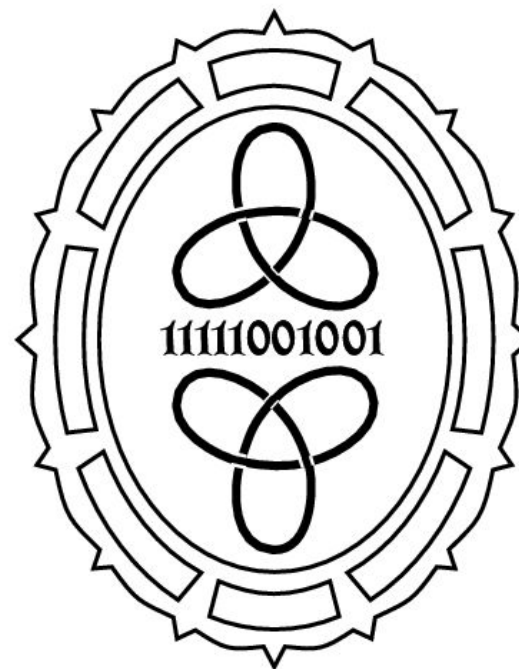
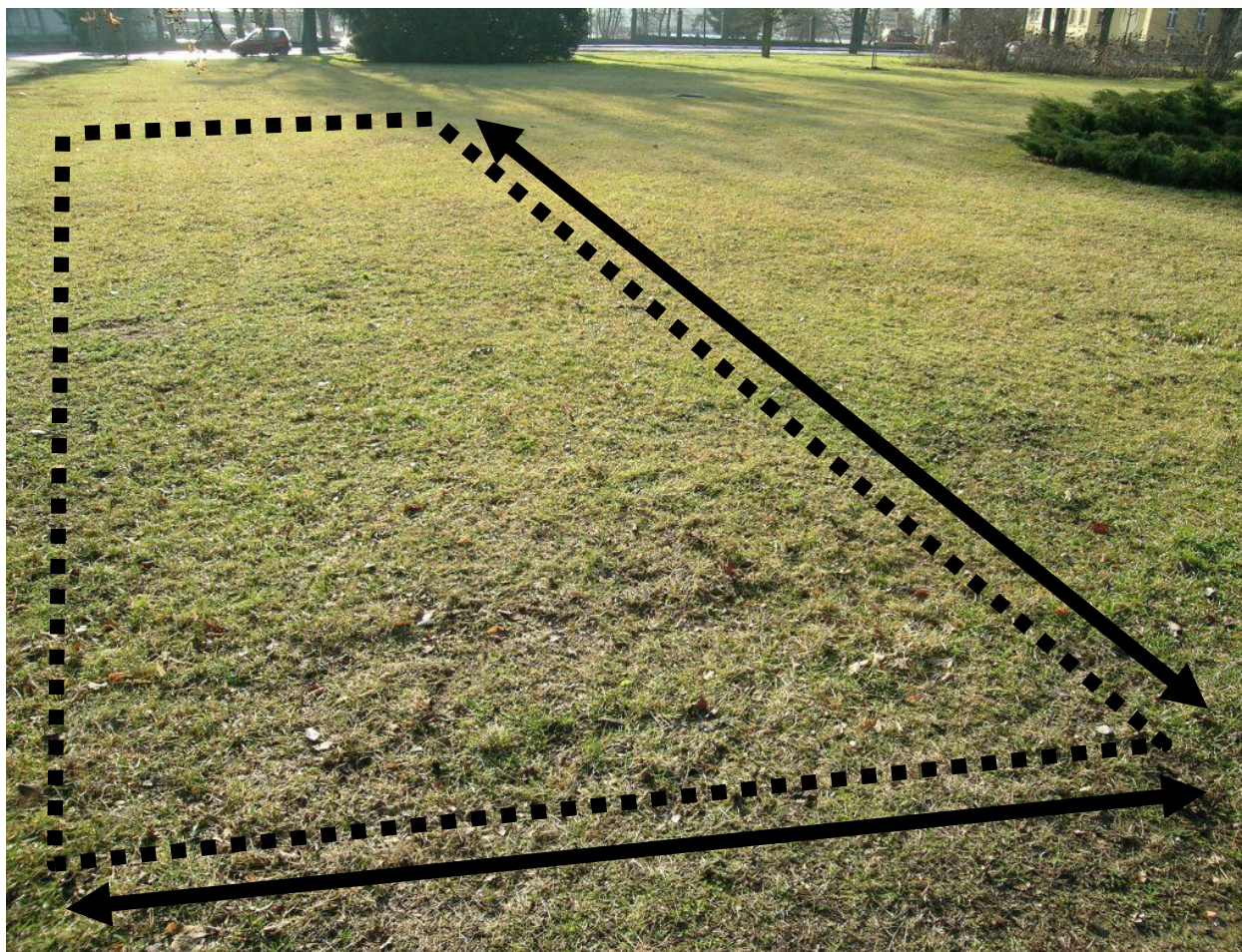
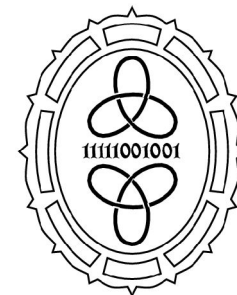


FRAKTALE i CHAOS – czyli czemu nie można zmierzyć powierzchni trawnika?



Filip Piękniewski

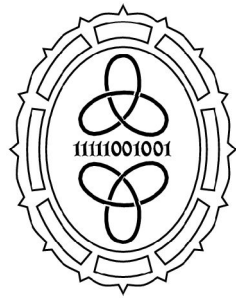
Mierzymy trawnik



- Traktujemy trawnik jako gładką powierzchnię.
- Mierzymy wzdłuż jednego i drugiego boku.
- Wyniki mnożymy przez siebie.
- Otrzymujemy np. 100 metrów kwadratowych.
- Odchodzimy zadowoleni z siebie.

Ale czy to co zmierzyliśmy to faktycznie powierzchnia trawnika?

Jednak diabeł tkwi w szczegółach...

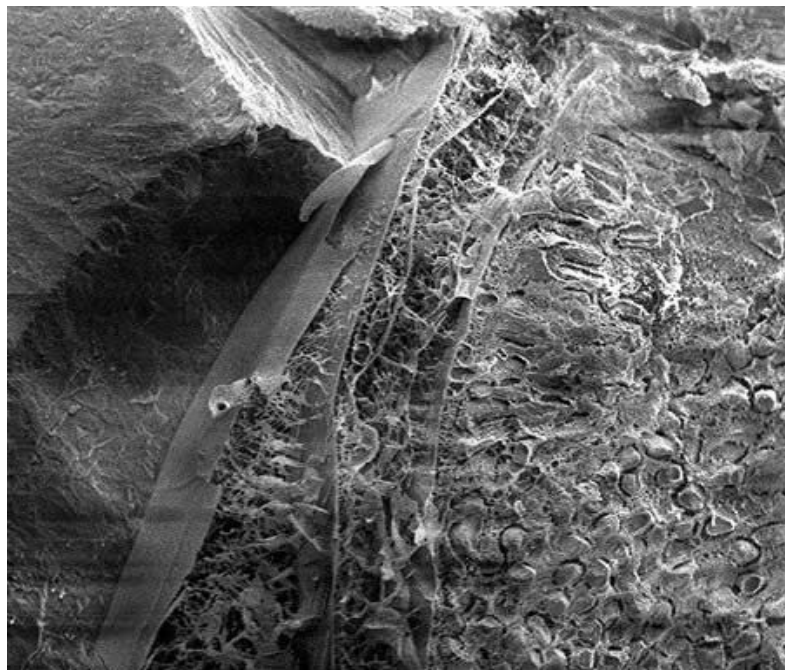
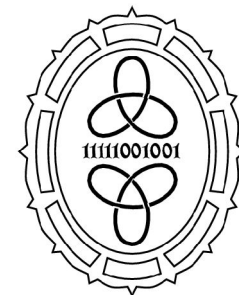


Trawniki nie są gładkie!
Wręcz przeciwnie, jest niezwykle
porowate! Musimy zatem wykonać
pomiar jeszcze raz, dokładniej.

- Zatrudniamy kilkunastu BARDZO cierpliwych i starannych ludzi.
- Dajemy im dokładne linijki, notatniki.
- Każemy im zmierzyć powierzchnię każdego źdźbła i każdego listka.
- Po wielu dniach otrzymujemy wynik, wielokrotnie więcej niż poprzednio, na przykład 1000 metrów kwadratowych.



Jednak diabeł tkwi w szczegółach...



Mikroskop elektronowy ujawnia nowy poziom złożoności struktury trawy...
Pojawiają się malutkie włoski, pojedyncze komórki.

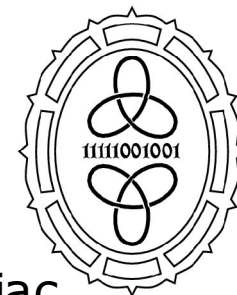
Nasz pomiar nadal jest niedokładny!
Gdybyśmy mogli zmierzyć powierzchnię komórek otrzymali byśmy zapewne wynik rzędu milionów metrów kwadratowych!

A gdy zbliżymy się do skali pojedynczych atomów?

Atomy nie mają czegoś takiego jak powierzchnia!

?

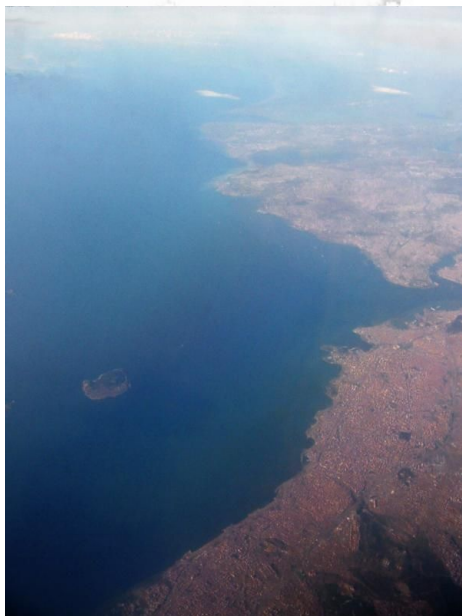
Problemy z pomiarami



Na podobne problemy natrafimy próbując zmierzyć:

- powierzchnię boczną drzewa
- długość linii brzegowej
- długość granicy państw

i wielu innych...

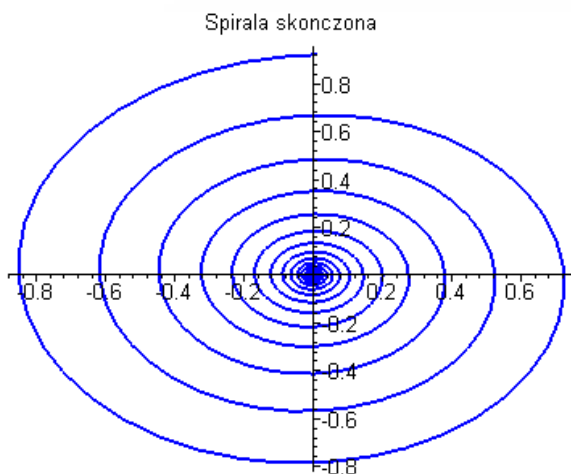
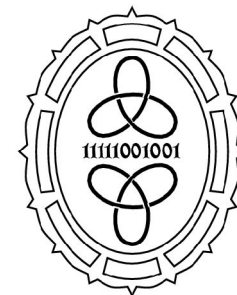


Dlaczego tak się dzieje? Czyżby te obiekty wykazywały jakiś nowy rodzaj złożoności?

Czy w matematyce też istnieją obiekty o takich własnościach?

Czy np. może istnieć krzywa zawarta w zbiorze o skończonej powierzchni ale nieskończonej długości?

Krzywa o nieskończonej długości??



Spirala zadana we współrzędnych biegunowych wzorem:

$$f(\alpha) = q^\alpha$$

dla $0 < q < 1$ ma skończoną długość.

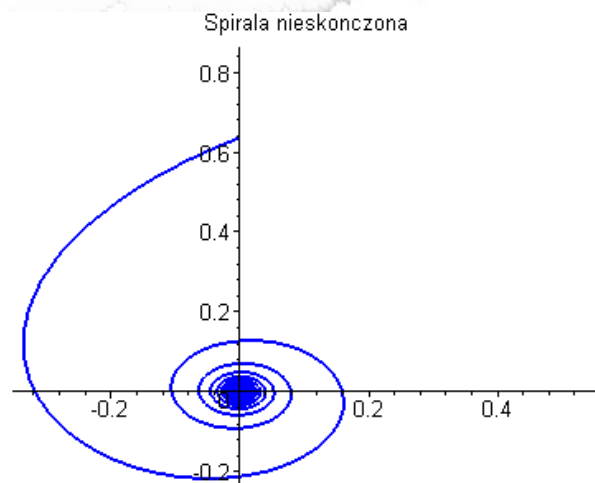
Tymczasem spirala dana wzorem

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

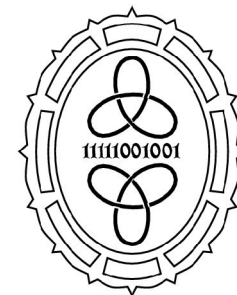
ma już długość nieskończoną.

Wyglądają podobnie, ale są to zupełnie inne obiekty matematyczne.

Zatem może istnieć krzywa zawarta w zbiorze o skończonej powierzchni, która ma nieskończoną długość!



Krzywa o nieskończonej długości



Wykonajmy konstrukcję obiektu geometrycznego według przepisu narysowanego obok.

Jaka będzie długość tej krzywej?

Jeśli początkowy odcinek miał długość 1 to pierwszy krok konstrukcji ma $4/3$.

W drugim kroku otrzymamy długość $4/3 * 4/3$

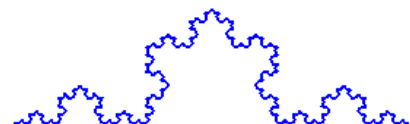
W trzecim odpowiednio $4/3 * 4/3 * 4/3$

...

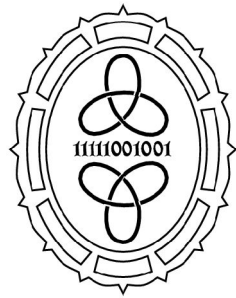
A ile wyniesie długość po nieskończonej ilości kroków?

$$\lim \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Ta niezwykła krzywa nosi nazwę krzywej Kocha. Jest to jeden z najprostszych fraktali.



Czym jest zatem fraktal?

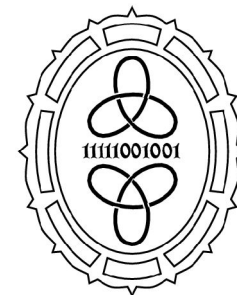


Fraktal to zbiór, którego **wymiar fraktalny** (Hausdorffa-Besicovicha) przekracza **wymiar topologiczny**.

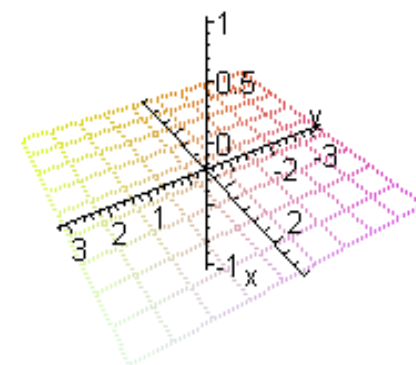
Ale co to znaczy?



Czym jest wymiar topologiczny?



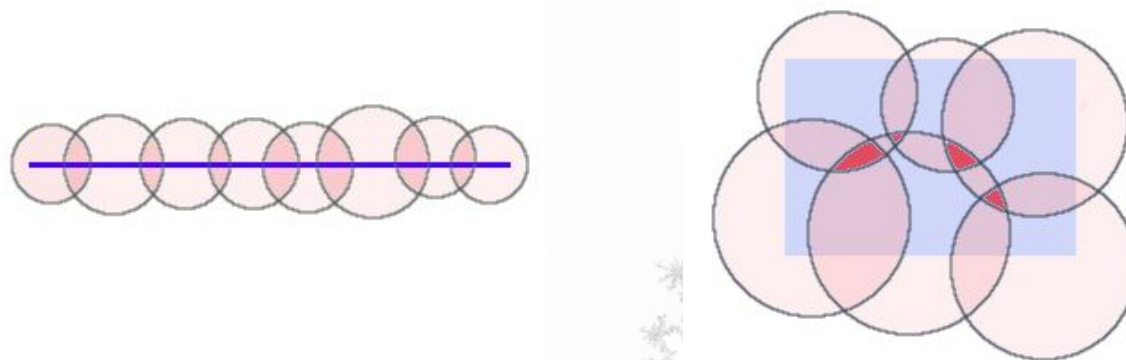
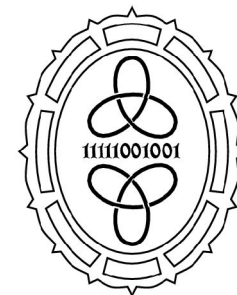
- W matematyce pojęcie wymiaru wcale nie jest oczywiste!
- Wymiar w intuicyjnym znaczeniu to minimalna liczba niezależnych parametrów potrzebnych do opisania jakiegoś zbioru.
- Wymiar powinien spełniać pewne zależności (być tak zwanym niezmiennikiem topologicznym).



Ale jak ocenić ile potrzeba parametrów do opisania bardzo skomplikowanego zbioru (np. fraktala) i czy istnieje przekształcenie zmieniające ten zbiór w coś, czego wymiar potrafimy jednoznacznie określić?

To jest niebanalny problem, który zaprzętał głowy matematyków w XX wieku, i nadal jest badany!

Wymiar topologiczny pokryciowy



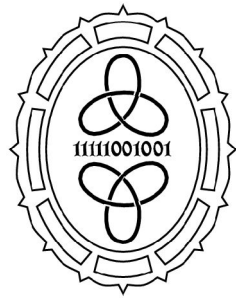
Pojęcie to zaproponował wybitny matematyk **Henri Leon Lebesgue** na początku XX wieku.

Wymiar pokryciowy **zgadza się** z intuicyjnym pojęciem wymiaru.

Matematycznie:

Definicja: Wymiar pokryciowy zwartej przestrzeni metrycznej X to najmniejsza liczba naturalna n , taka że istnieje takie pokrycie przestrzeni X kulami otwartymi dowolnie małej średnicy, by żaden jej punkt nie należał do więcej niż $n+1$ kul.

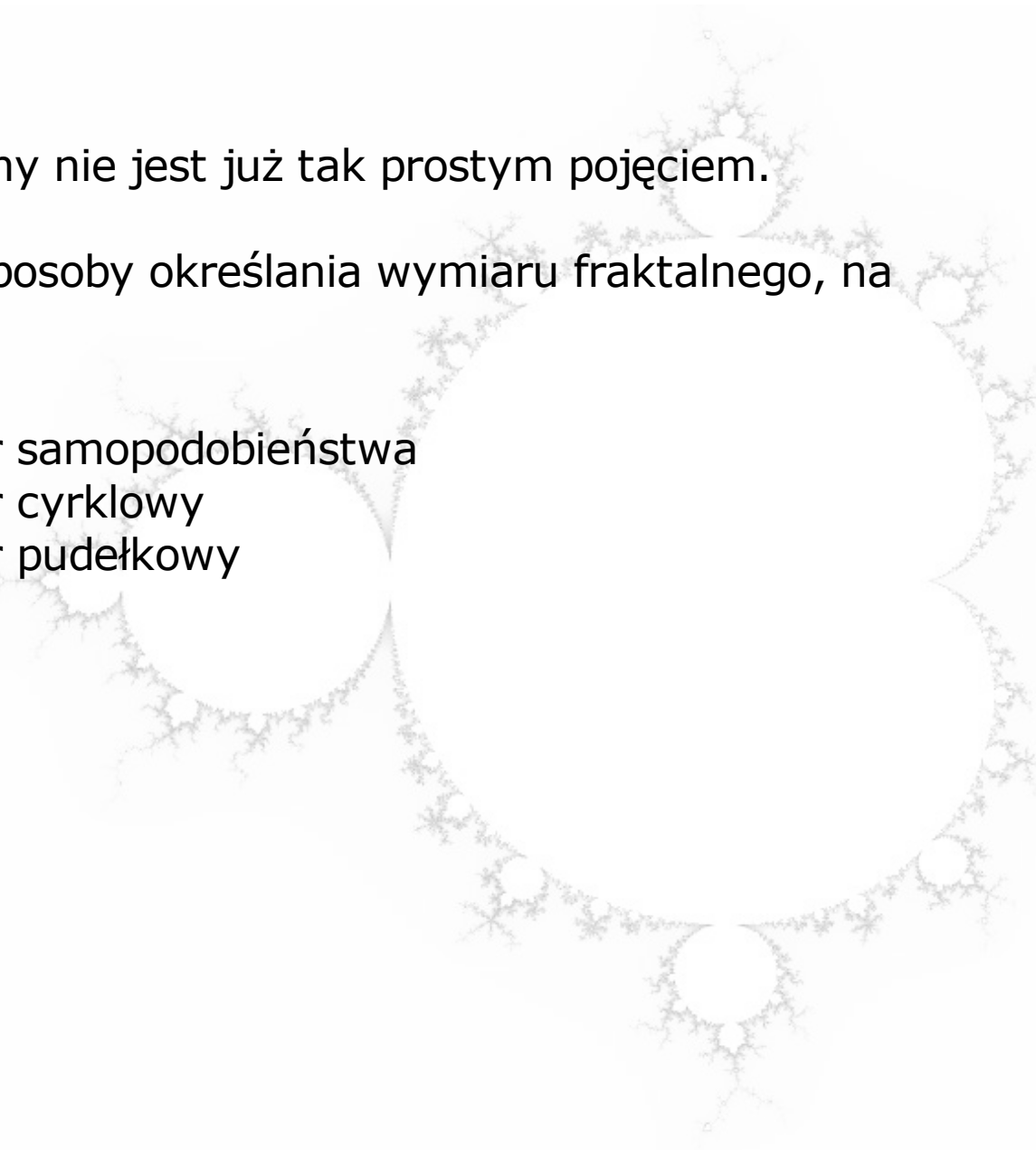
Wymiar fraktalny



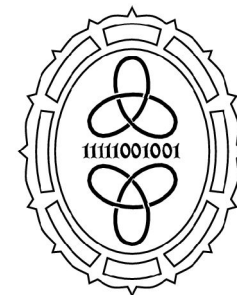
Wymiar fraktalny nie jest już tak prostym pojęciem.

Znamy różne sposoby określania wymiaru fraktalnego, na przykład:

- Wymiar samopodobieństwa
- Wymiar cyrkłowy
- Wymiar pudełkowy
- ...



Wymiar samopodobieństwa



Dla obiektów które są samopodobne (to znaczy cały obiekt jest podobny do swojej właściwej części w pewnej skali) wymiar fraktalny przyjmuje szczególnie prostą postać:



Niech a będzie oznaczało liczbę mniejszych części z których zbudowany jest obiekt.

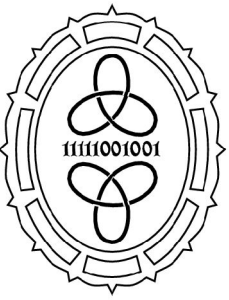
Niech s oznacza skalę podobieństwa obiektu ze swoimi mniejszymi częściami.

Wtedy liczbę:

$$D = \frac{(\log(a))}{\left(\log\left(\frac{1}{s}\right)\right)}$$

nazywamy wymiarem samopodobieństwa.

A co jeśli obiekt nie jest samopodobny lub podobieństwo nie jest ścisłe? Czy można mu przypisać jakiś wymiar fraktalny?



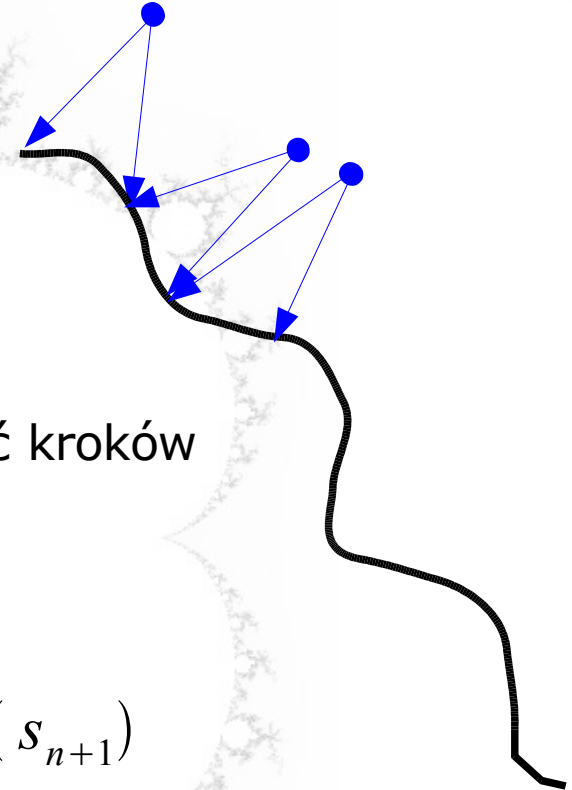
Wymiar cyrkłowy

Powiedzmy, że mamy krzywą na płaszczyźnie, np. Jest to kontur jakiegoś państwa na mapie. Chcemy oszacować wymiar fraktalny takiego zbioru.

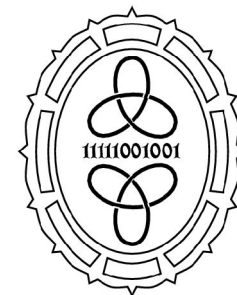
- Bierzemy cyrkiel, ustawiamy w nim odległość s_n
- Przechodzimy cyrklem wzdłuż obiektu i zliczamy ilość kroków potrzebnych do pełnego obejścia $N(s_n)$
- Zmniejszamy rozstawienie cyrkla z $s_n \rightarrow s_{n+1}$
- Zliczamy ilość kroków przy nowym rozstawieniu $N(s_{n+1})$

Wymiar fraktalny jest w tym przypadku przybliżany (w granicy) wzorem:

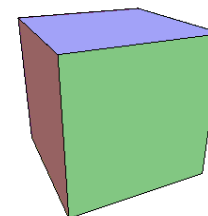
$$D = 1 + \frac{(\log(N(s_{n+1})) - \log(N(s_n)))}{\left(\log\left(\frac{1}{s_{n+1}}\right) - \log\left(\frac{1}{s_n}\right)\right)}$$



Wymiar pudełkowy



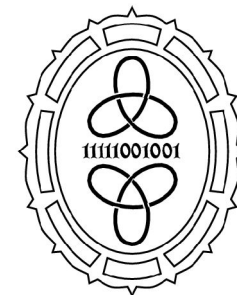
Wyobraźmy sobie że mamy przestrzeni jakiś nieregularny zbiór. Czy można mu jakoś przypisać wymiar fraktalny?



- Dzielimy płaszczyznę za pomocą regularnej siatki o grubości s_n
- Zliczamy w ilu kwadracikach (sześciannikach) siatki znajdują się elementy naszego zbioru, otrzymujemy pewną liczbę zależną od s , nazwijmy ją $N(s_n)$
- Zmniejszamy grubość siatki $s_n \rightarrow s_{n+1}$
- Przybliżenie wymiaru pudełkowego uzyskujemy za pomocą wzoru:

$$D = \frac{(\log(N(s_{n+1})) - \log(N(s_n)))}{\left(\log\left(\frac{1}{s_{n+1}}\right) - \log\left(\frac{1}{s_n}\right)\right)}$$

Przykładowe wymiary fraktalne



Wymiar fraktalny odcinka wynosi 1. Jest więc taki sam jak wymiar topologiczny. Zatem **odcinek nie jest fraktalem!**

Wymiar samopodobieństwa krzywej Kocha wynosi

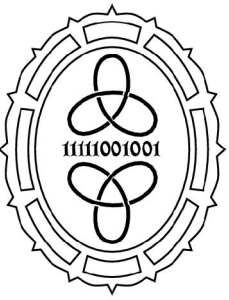
$$d = \frac{\log(a)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1,2619 \dots$$



Zatem **krzywa Kocha jest fraktalem!**

Wymiar cyrkłowy (jak i pudełkowy) wybrzeża Wielkiej Brytanii można oszacować w okolicach 1.36. Zatem **linia brzegowa Wielkiej Brytanii jest fraktalem!**

Ile wynosi wymiar fraktalny trawnika? Z pewnością jest większy niż wymiar topologiczny trawnika...



Produkcja fraktali - iteracje

Czy istnieje jakiś przepis na tworzenie fraktalnych wzorów?

Odpowiedź brzmi tak, kluczowe znaczenie ma tu proces zwany **iteracją** przekształcenia.

Mamy funkcję f , która przekształca pewien zbiór sam w siebie. Weźmy pewien punkt x .

Pierwszą iteracją f na x będzie punkt

$$f(x)$$

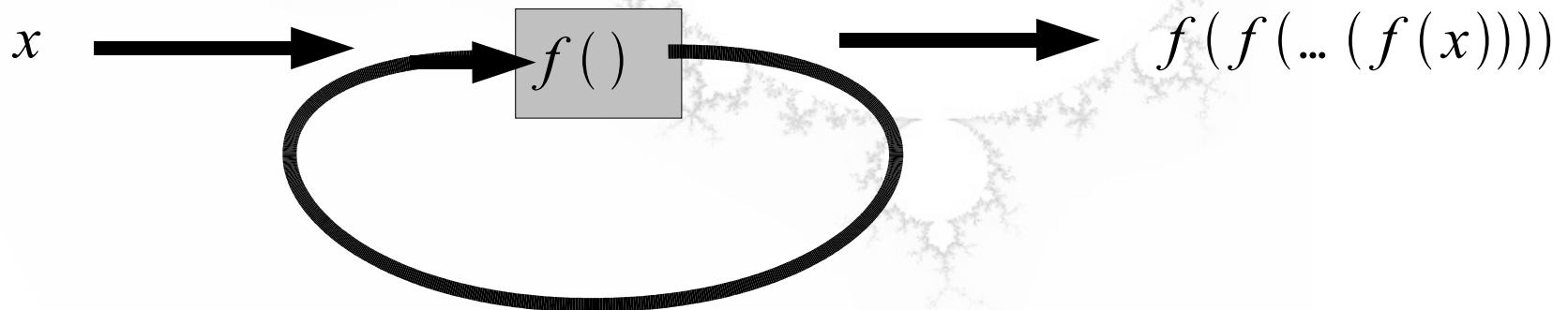
Drugą iteracją f na x będzie punkt

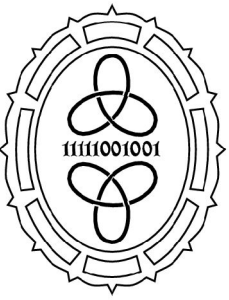
$$f(f(x))$$

Trzecią iteracją f na x będzie punkt

$$f(f(f(x)))$$

...





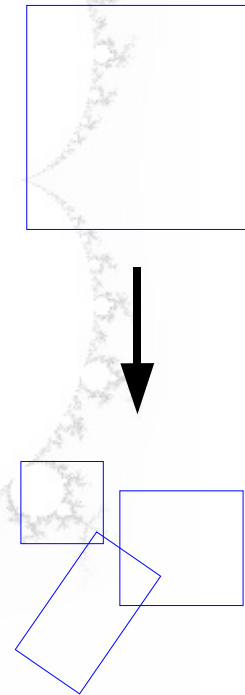
Produkcja fraktali - IFS

IFS – deterministic **i**terated **f**unction **s**ystem – deterministyczny system iteracyjny.

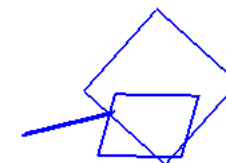
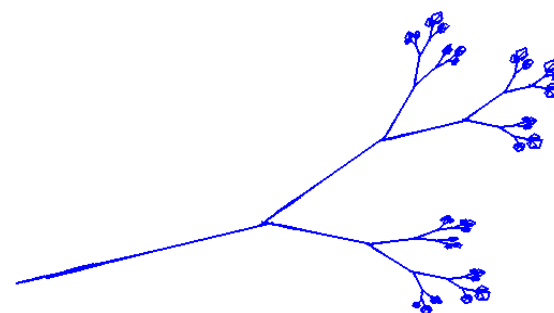
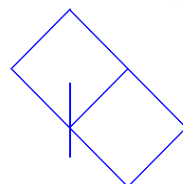
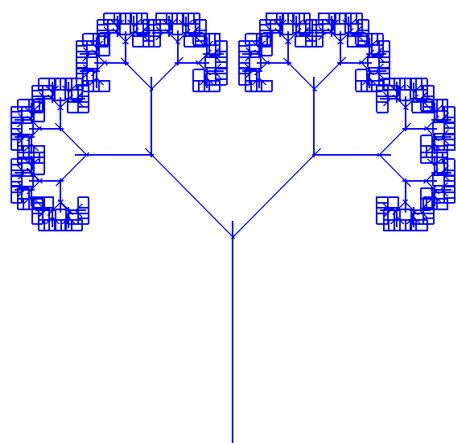
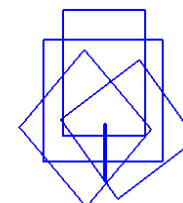
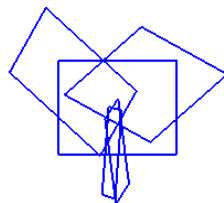
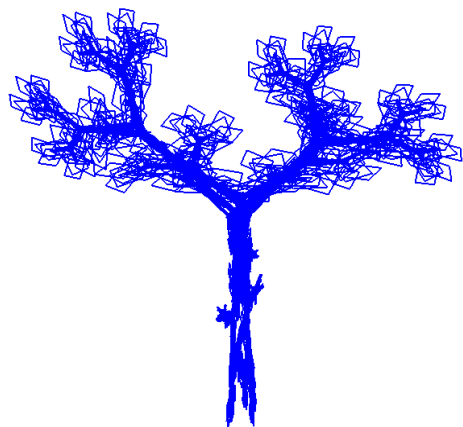
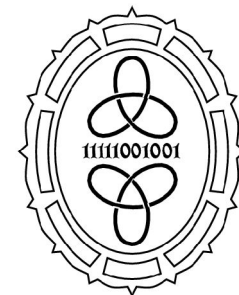
IFS – mechanizm pozwalający za pomocą kilku parametrów (przesunięcie, obrót, skalowanie) i prostych operacji geometrycznych, tworzyć skomplikowane kształty fraktali.

Jak to działa?

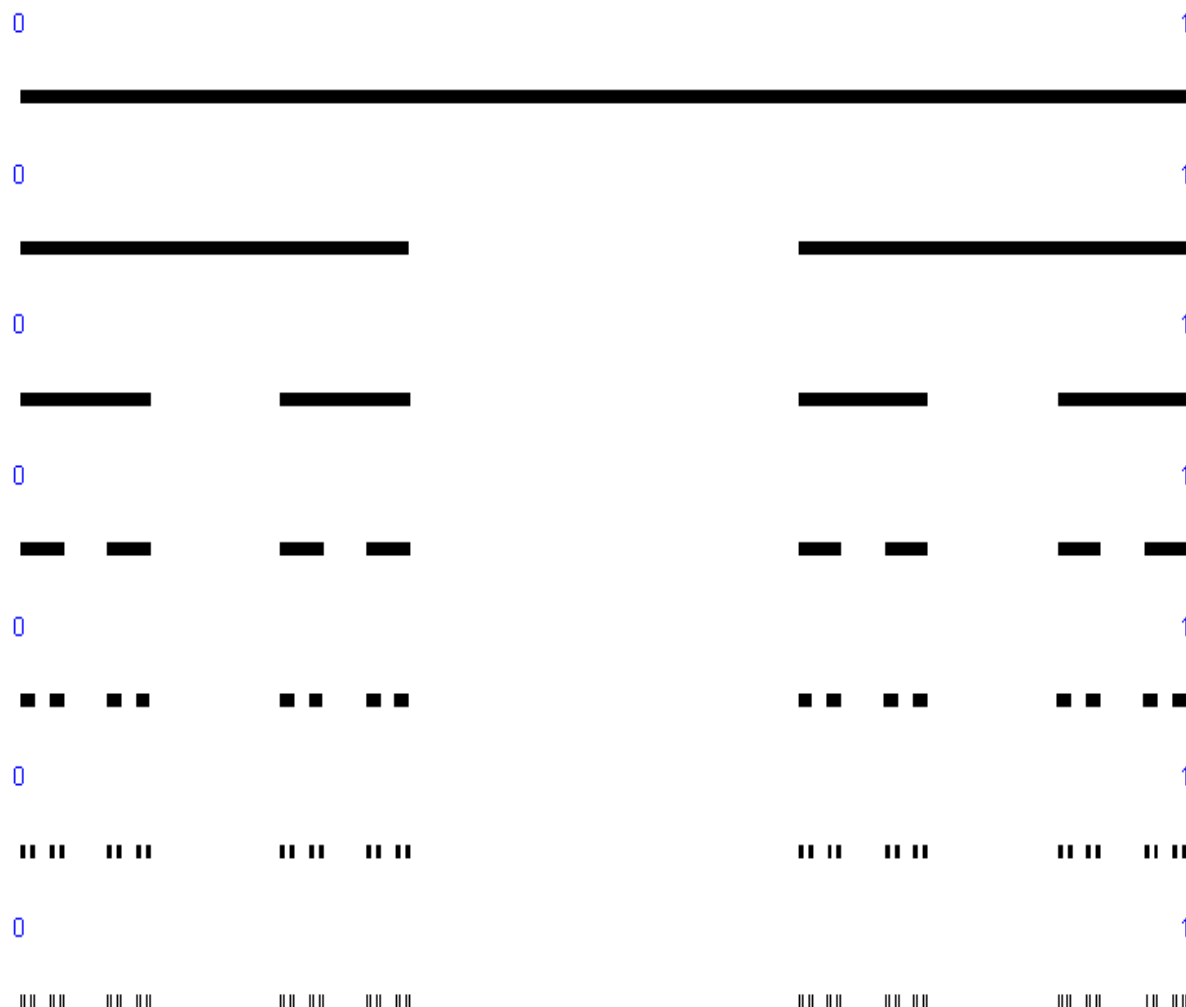
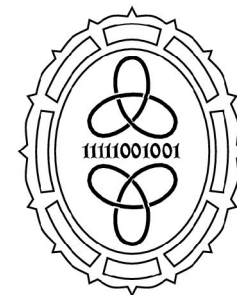
- Ustalamy pewien obraz początkowy oraz parametry przekształcenia.
- Obraz jest powielany, oraz deformowany zgodnie z zadanymi parametrami i zastępowany powstałym po przekształceniu zestawem obrazów.
- Dla każdego z nowo powstałych obrazów, aplikowane jest to samo przekształcenie.



Drzewa i liście z IFS



Klasyczne fraktale – zbiór Cantora



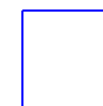
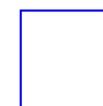
Wymiar samopodobieństwa:

$$\frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,6309$$

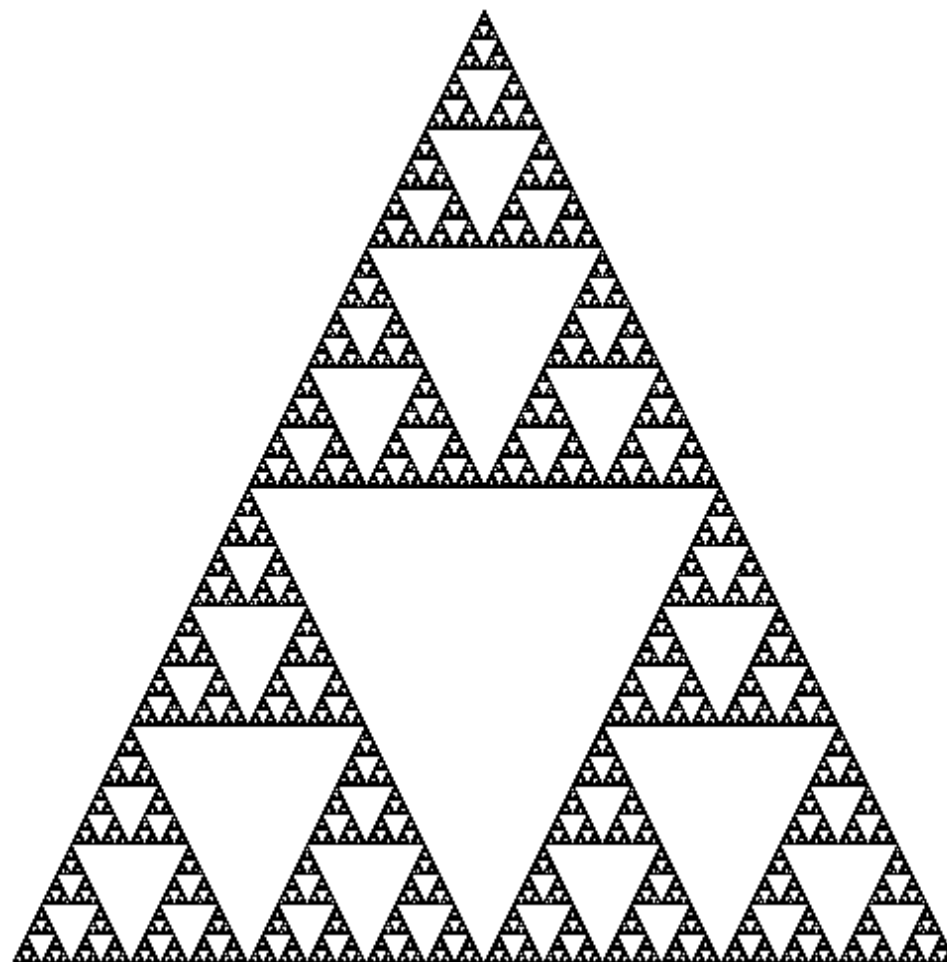
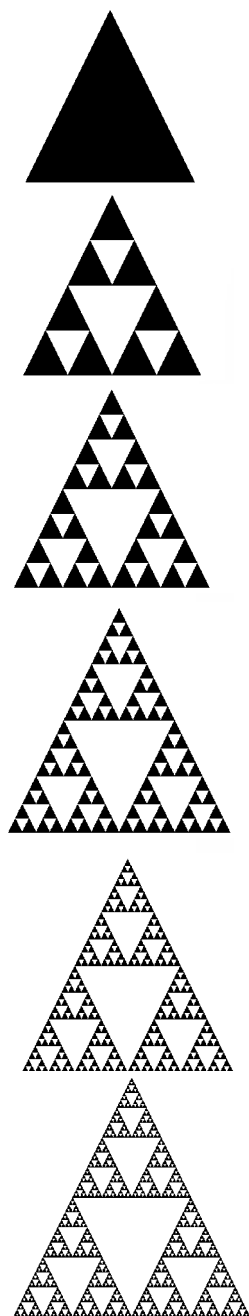
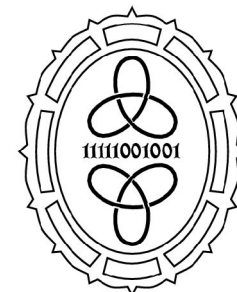
Wymiar topologiczny: 0

Przykład zbioru nieprzeliczalnego o mierze Lebesgue'a równej 0.

Nazwany został na cześć Georga Cantora (1845-1918), wybitnego matematyka, twórcy współczesnej teorii mnogości.



Trójkąt Sierpińskiego

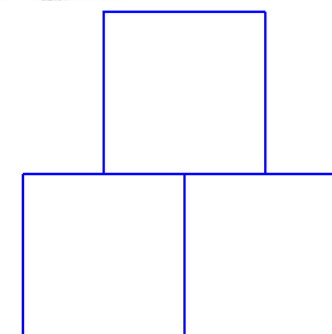


Wymiar samopodobieństwa:

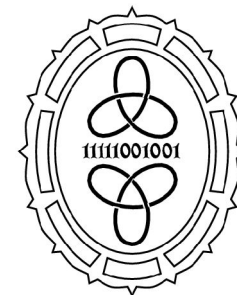
$$\frac{\log(3)}{\log(2)} = 1,585$$

Wymiar topologiczny: 1

Jeden z najbardziej znanych, klasycznych fraktali, nazwany na cześć wybitnego polskiego matematyka Wacława Sierpińskiego (1882-1962) który go po raz pierwszy skonstruował w 1916 r.



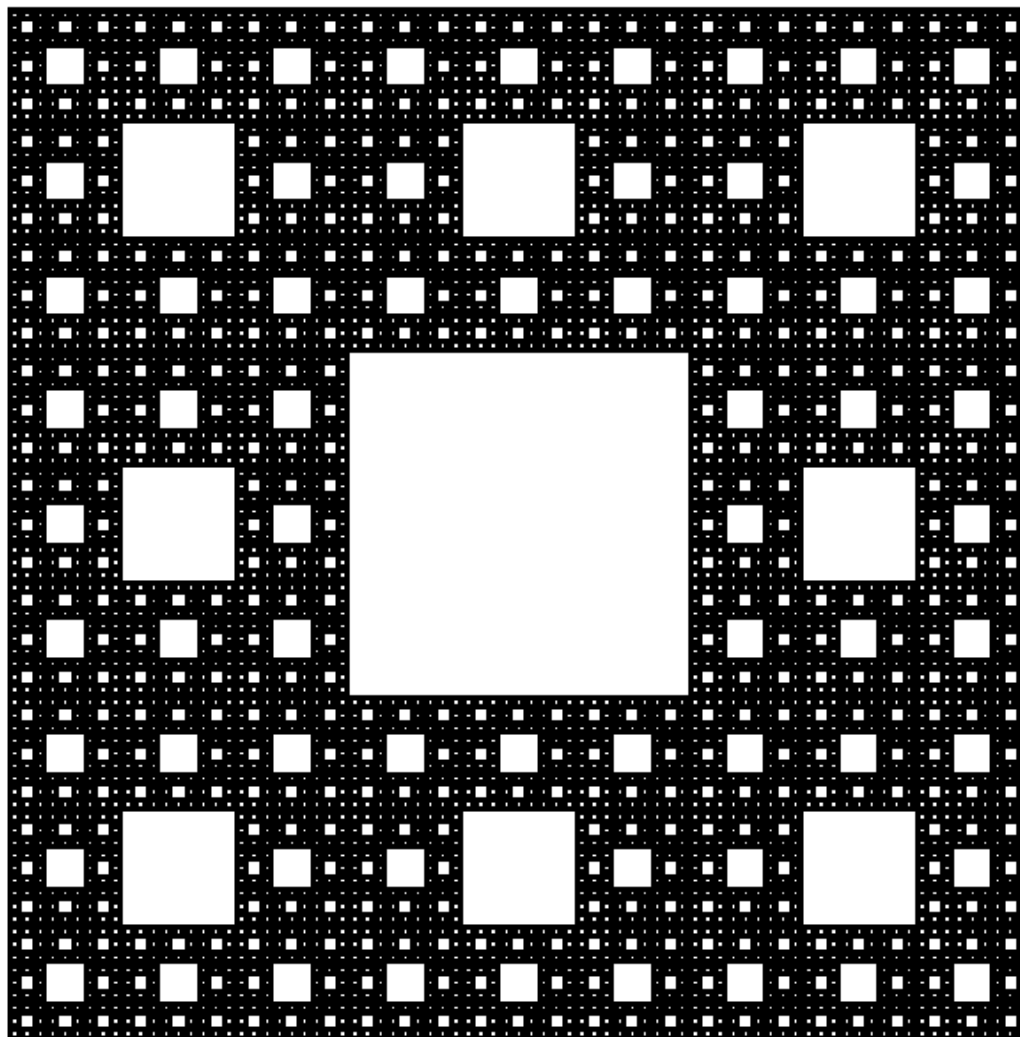
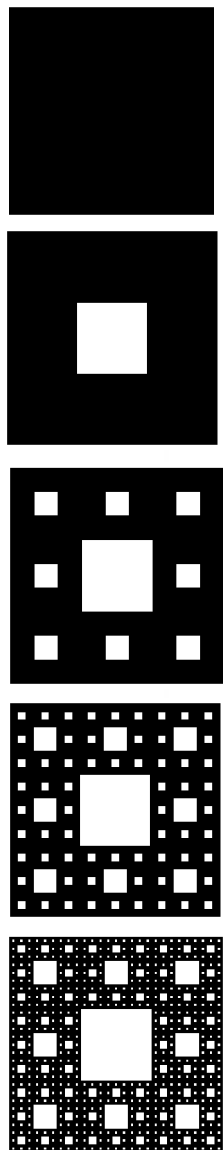
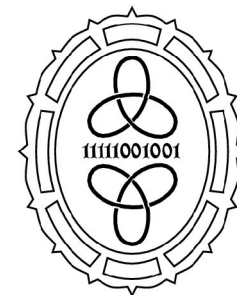
Wacław Sierpiński



Wacław Sierpiński (1882-1969)
urodzony w Warszawie. Wybitny polski matematyk mający na swoim koncie liczne sukcesy w różnych dziedzinach matematyki, od teorii liczb do geometrii fraktalnej. Był autorem ponad 700 prac naukowych i 50 książek, z których spora część jest do dzisiaj uznawana za najlepsze podręczniki.



Dywan Sierpińskiego

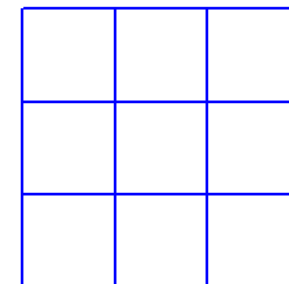


Wymiar
samopodobieństwa:

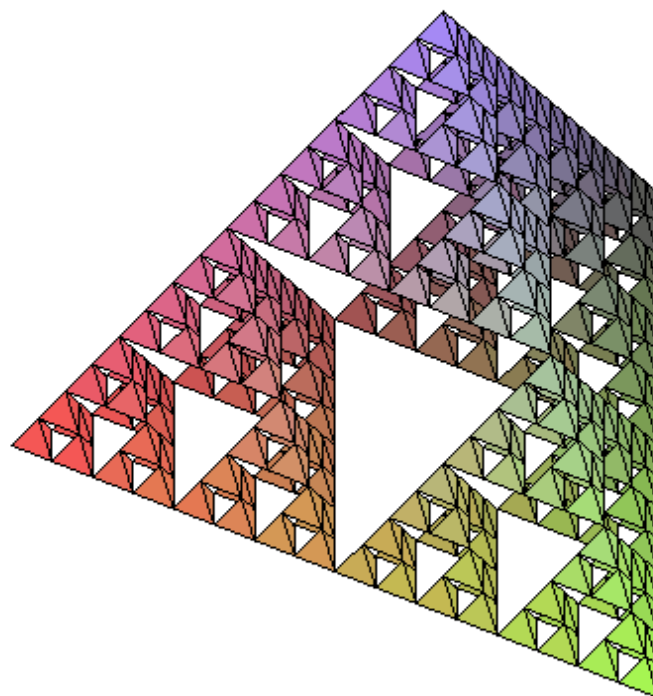
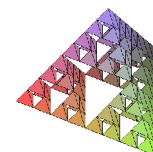
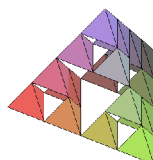
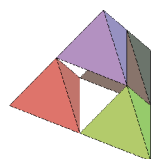
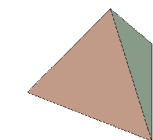
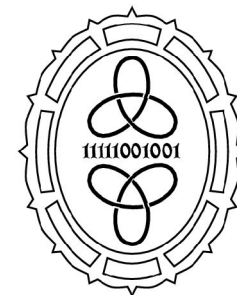
$$\frac{\log(8)}{\log(3)} = 1,8928$$

Wymiar topologiczny: 1

Klasyczny bardzo
ciekawy fraktal.
Zauważmy, iż jego część
wspólna z prostą
przechodzącą przez jego
środek jest zbiorem
Cantora.



Piramida Sierpińskiego



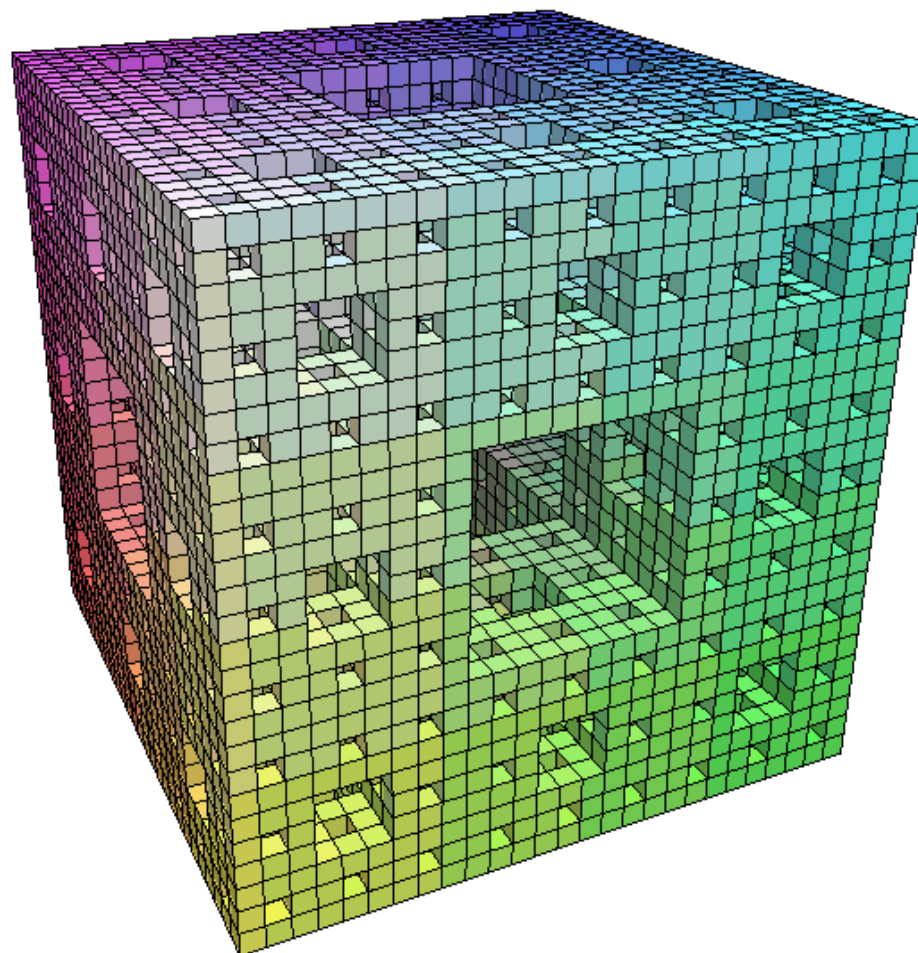
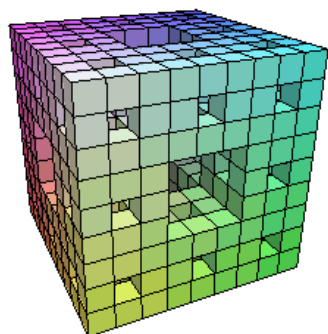
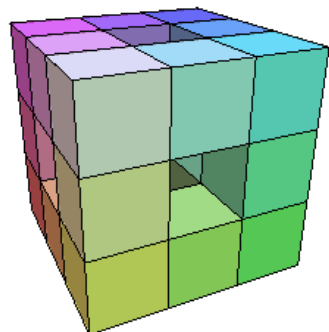
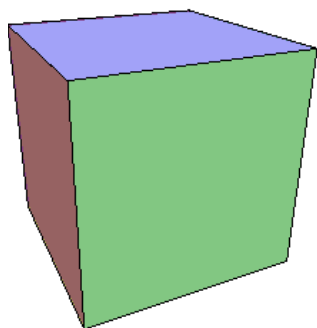
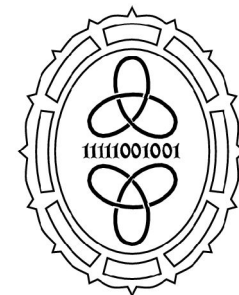
Wymiar samopodobieństwa:

$$\frac{\log(4)}{\log(2)} = 2$$

Wymiar topologiczny: 1

Jeszcze jeden fraktal nazwany na cześć polskiego matematyka. Jest to przykład dość szczególny – wymiar fraktalny tego obiektu jest liczbą całkowitą (2).

Gąbka Menger



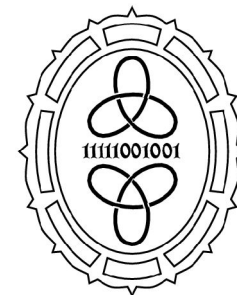
Wymiar
samopodobieństwa:

$$\frac{\log(20)}{\log(3)} = 2.7268$$

Wymiar topologiczny: 1

Nazwana na cześć Karla Menger, matematyka, jednego z nauczycieli B. Mandelbrota. Gąbka Menger to trójwymiarowy odpowiednik dywanu Sierpińskiego.

Czy z funkcji znanych ze szkoły powstają fraktale?



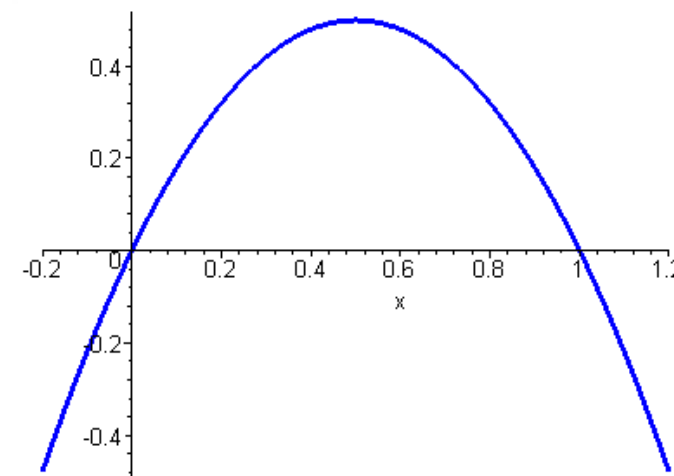
Bardzo zaawansowane badania matematyczne często zaczynają się niewinnie. Rozważmy funkcję:

$$y = ax(1-x)$$

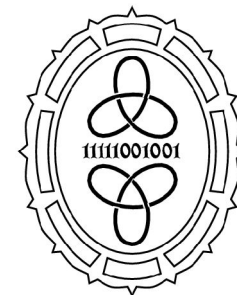
Jest to zwykła funkcja kwadratowa znana ze szkoły, jej wykresem jest parabola (rys). Funkcja ta zwana jest czasami funkcją logistyczną.

Czy na temat tak prostej funkcji można jeszcze coś odkrywczego powiedzieć? Można, o czym wszystkich przekonał **Mitchell J. Feigenbaum**.

Jego pomysł był prosty: zacznijmy funkcję logistyczną iterować, i zobaczmy jak w takim procesie będą zachowywać się punkty z odcinka $[0,1]$?



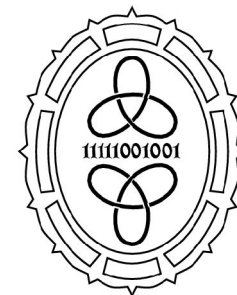
Mitchell J. Feigenbaum



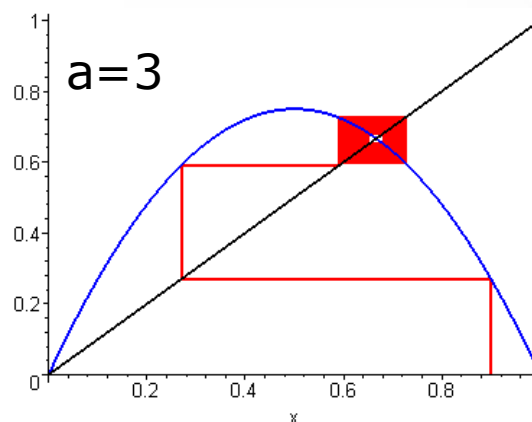
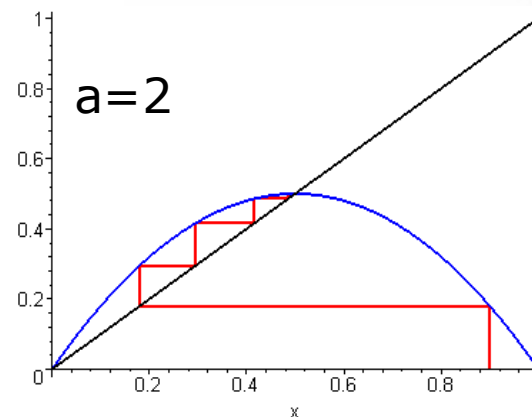
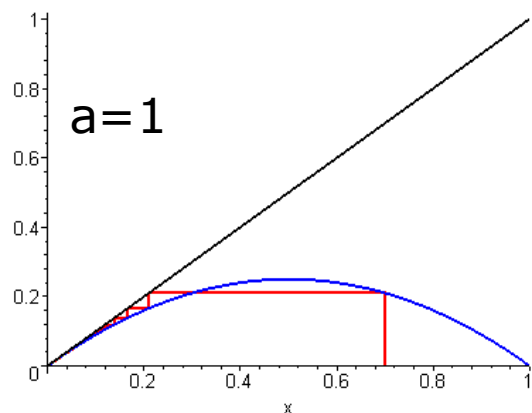
Urodzony w 1944r w Philaldephi, USA.
Jego ojciec (Abraham Joseph Feigenbaum) był chemikiem,
wyemigrował z Warszawy do USA przed
II wojną światową.

Dzisiaj Mitchell jest profesorem na
Uniwersytecie Rockefellera w Nowym
Jorku.





Iterujemy funkcję logistyczną



Oznaczmy sobie:

$$f(x) = ax(1-x)$$

Nieskończony ciąg punktów:

$$[x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots]$$

będziemy nazywać **orbitą** punktu x_0 .
Czy to jak wygląda orbita zależy jakoś od parametru a ?

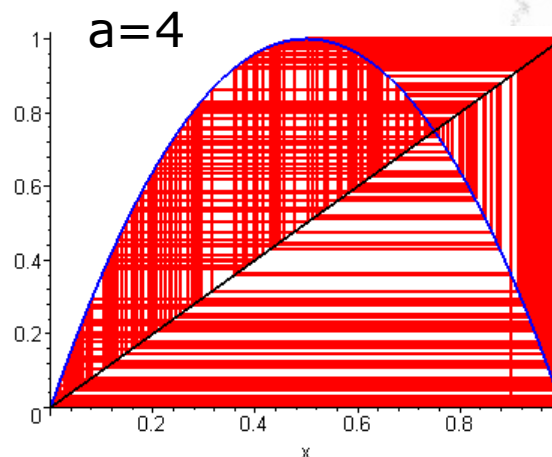


Diagram stanów ustalonych

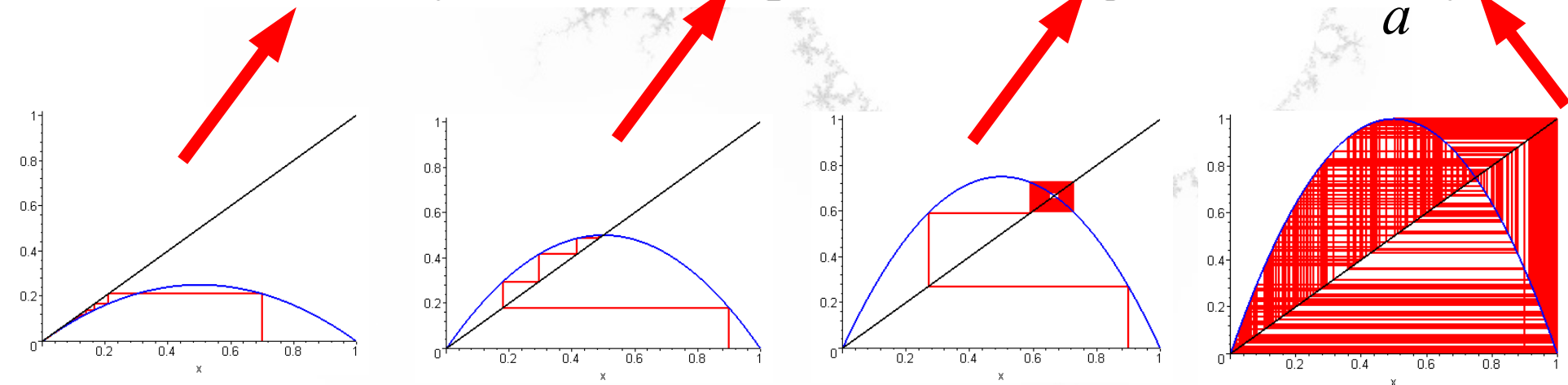
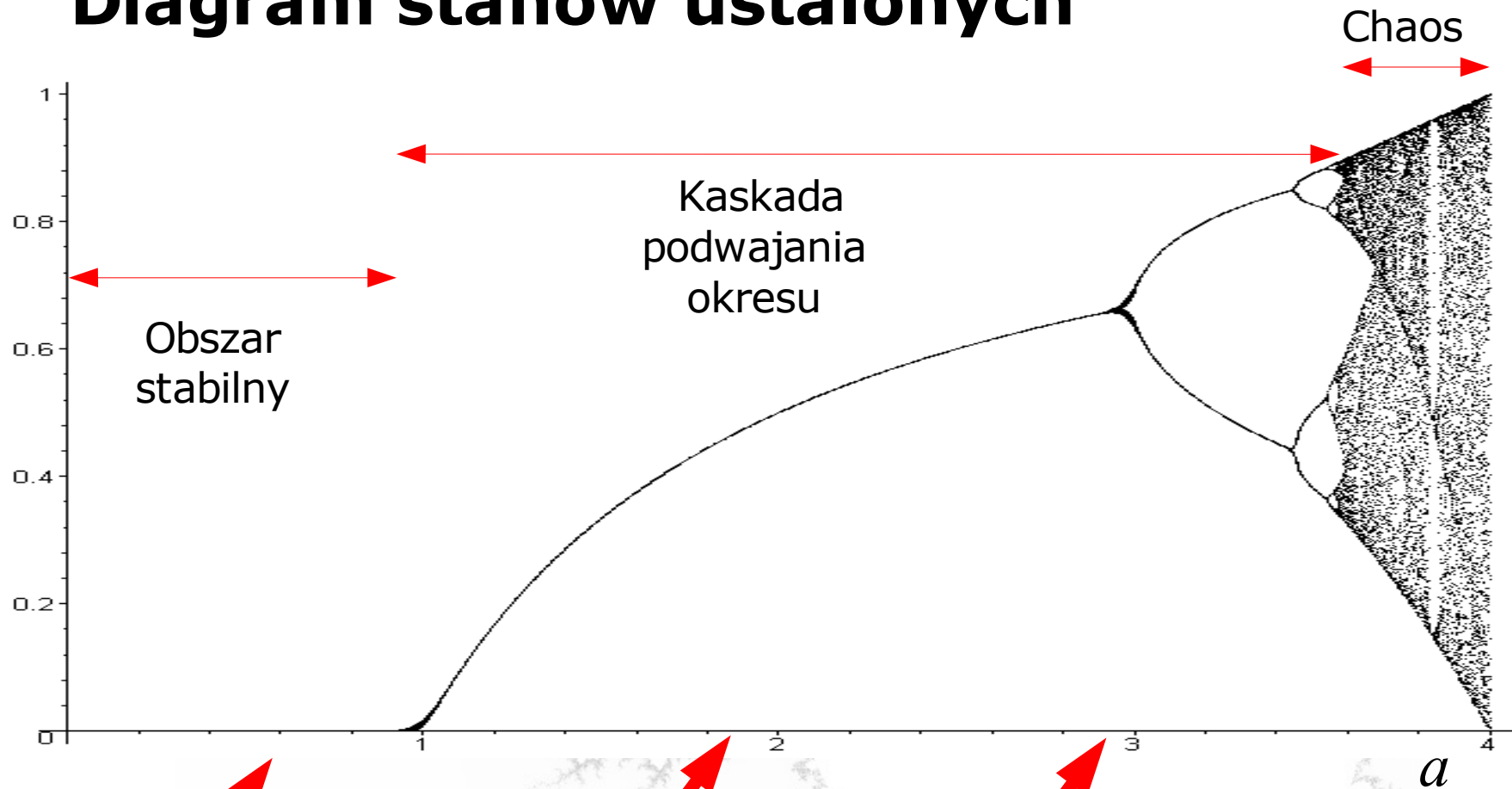
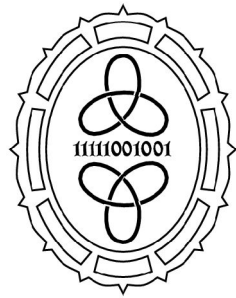
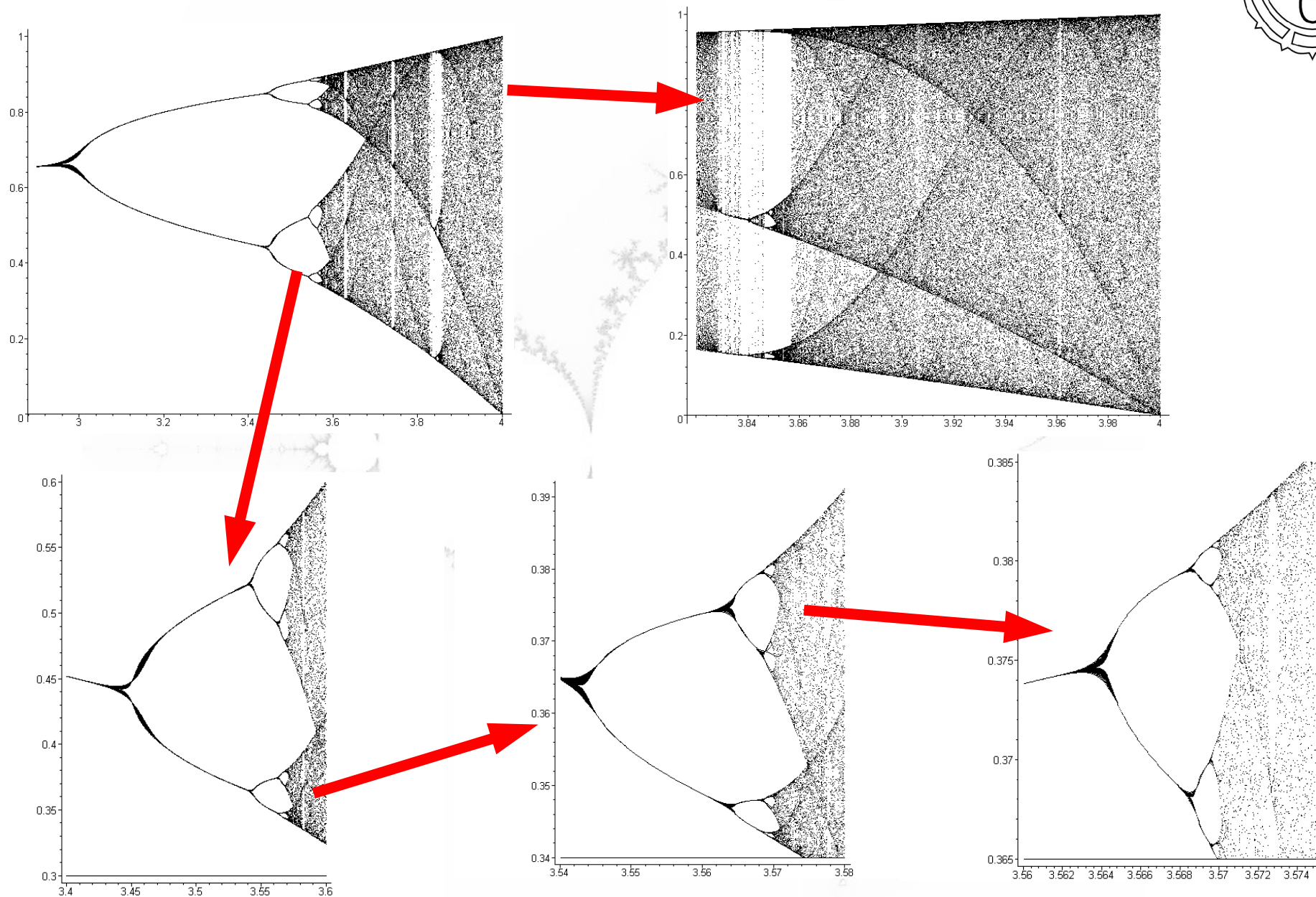
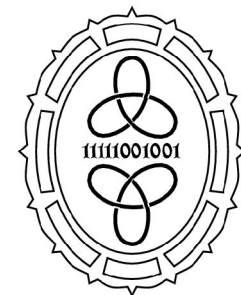
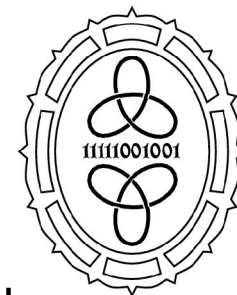


Diagram stanów ustalonych jako fraktal



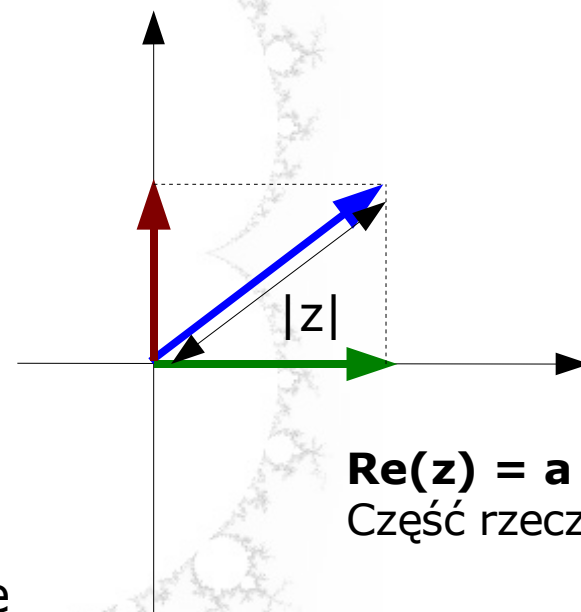
Liczby zespolone



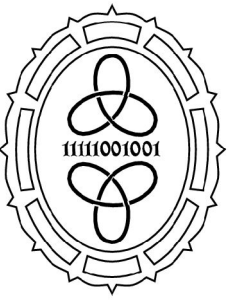
Aby poznać naturę najślawniejszych fraktali, zbiorów Julii i wreszcie zbioru Mandelbrota, trzeba orientować się w liczbach zespolonych.

- Liczby zespolone to punkty płaszczyzny, czyli **wektory zaczepione w zerze**.
- Wektory te mają dwie współrzędne, typowa liczba zespolona jest postaci $z=[a,b]$
- Liczby zespolone **dodajemy jak zwykłe wektory**
- Liczby zespolone **mnożymy według przepisu**:
$$[a,b]*[c,d] = [a*c - b*d, a*d + b*c]$$
- Liczbę zespoloną postaci $[a,0]$ traktujemy jak liczbę rzeczywistą a .
- Długość wektora z nazywamy **modułem liczby zespolonej** z i oznaczamy $|z|$.

Im(z) = b - Imaginative
Część urojona



Re(z) = a - Real
Część rzeczywista



Dlaczego liczby zespolone?

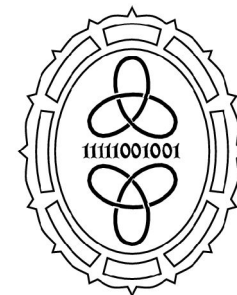
Zalety, czyli dlaczego matematycy lubią liczby zespolone:

- Uogólnienie liczb rzeczywistych
- Niezwykłe bogactwo własności i zależności, niezwykle silne twierdzenia wyjaśniające także dziwne tajemnice liczb rzeczywistych.

Wady, czyli dlaczego liczby zespolone wydają się na początku strasznie nienaturalne i "urojone" :

- Brak liniowego porządku - liczb zespolonych nie da się ze sobą porównywać relacjami mniejszości-większości (jedynie co do modułu)
- W liczbach zespolonych istnieje element który podniesiony do kwadratu daje -1. Pojęcie pierwiastka arytmetycznego przestaje być użyteczne, na jego miejsce wprowadza się bardziej skomplikowane pojęcie pierwiastka algebraicznego
- Nie ma plus ani minus nieskończoności, jest po prostu nieskończoność

Iteracja funkcji kwadratowej

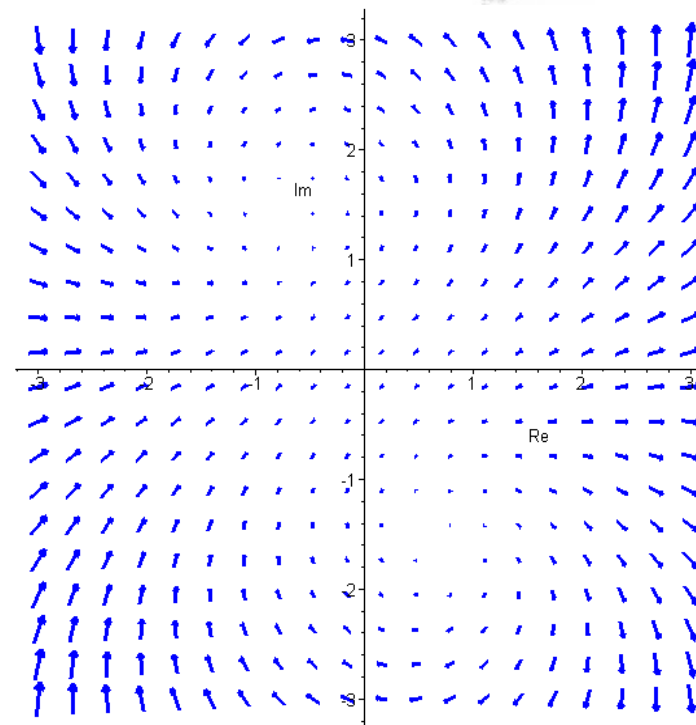
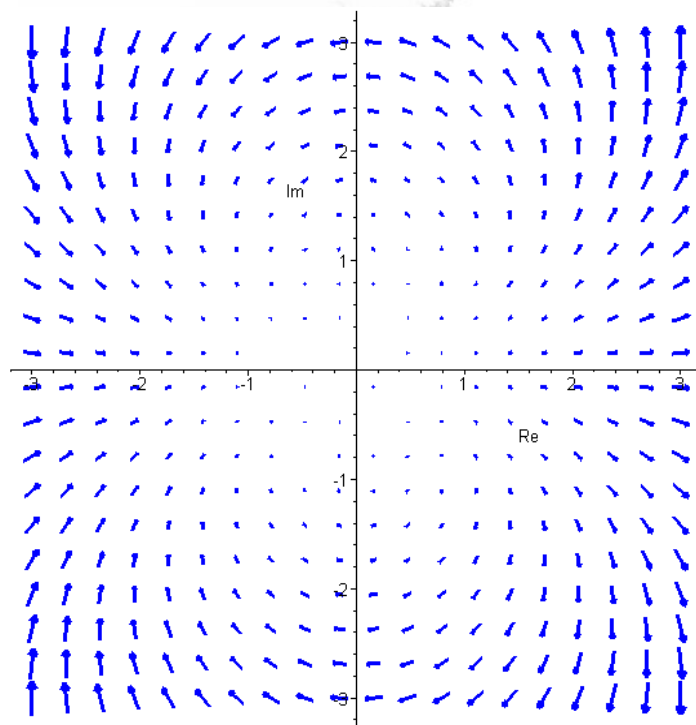


Rozważmy funkcję:

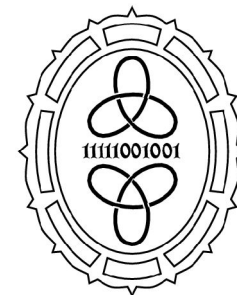
$$f(z) = z^2 + c$$

tyle, że tym razem z przebiega po liczbach zespolonych zaś c jest zespolonym parametrem. Własnościami tego przekształcenia zajmował się w latach 30 XX wieku **Gaston Julia**.

Jak rozumieć funkcję określoną na liczbach zespolonych o wartościach zespolonych? Jest to po prostu funkcja wektorowa przekształcająca płaszczyznę:



Gaston Maurice Julia

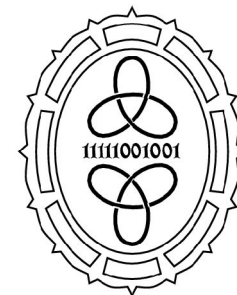


Gaston Maurice Julia (1893-1978) – Francuski matematyk (urodzony w Algierii), badał układy dynamiczne, w szczególności iteracje funkcji kwadratowej na płaszczyźnie zespolonej.

W czasie pierwszej wojny światowej został ranny w twarz, od tego czasu nosił maskę zakrywającą nos.



Zbiory Julii



Sposób postępowania:

- Ustalamy parametr zespolony c .
- Iterujemy funkcję

$$f(z) = z^2 + c$$

dla wszystkich wartości zespolonych z w pewnym przedziale.

- Sprawdzamy czy orbita kolejnej liczby zespolonej jest nieograniczona (ucieka do nieskończoności), jeśli tak przypisujemy tę liczbę do zbioru uciekinierów U .
- Jeśli orbita jest ograniczona, dopisujemy tę liczbę do zbioru więźniów W .

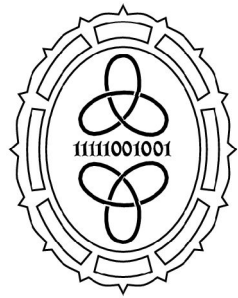
Reasumując, rozcinamy płaszczyznę zespoloną na dwa zbiory:

- **U – uciekinierów,**
- **W – więźniów.**

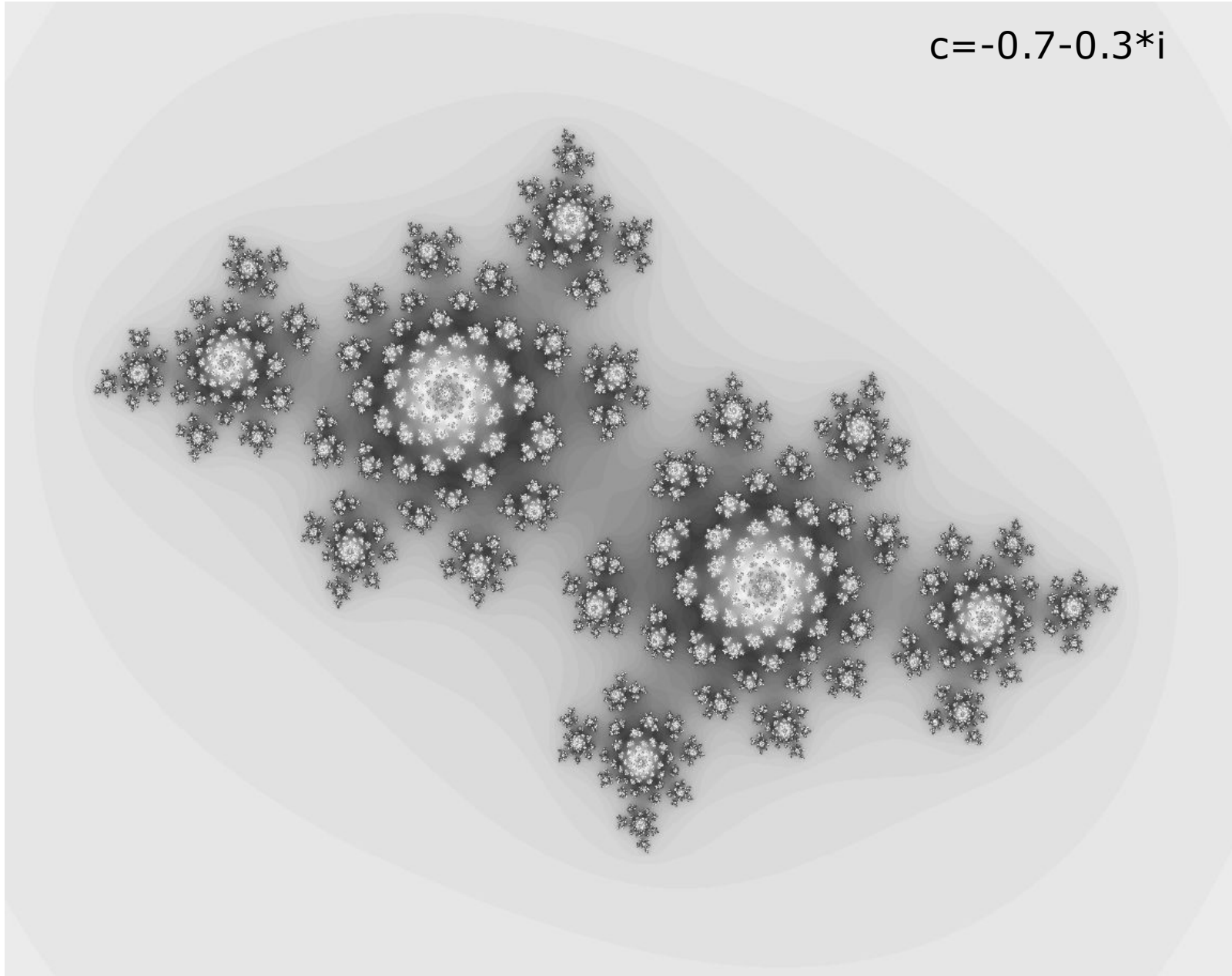
Każda liczba zespolona należy do jednego z tych zbiorów.

- Jak wygląda granica między zbiorem uciekinierów a zbiorem więźniów?

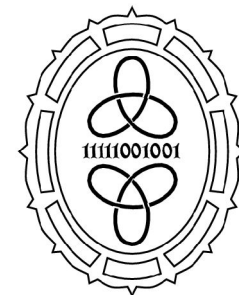
Zbiory Julii



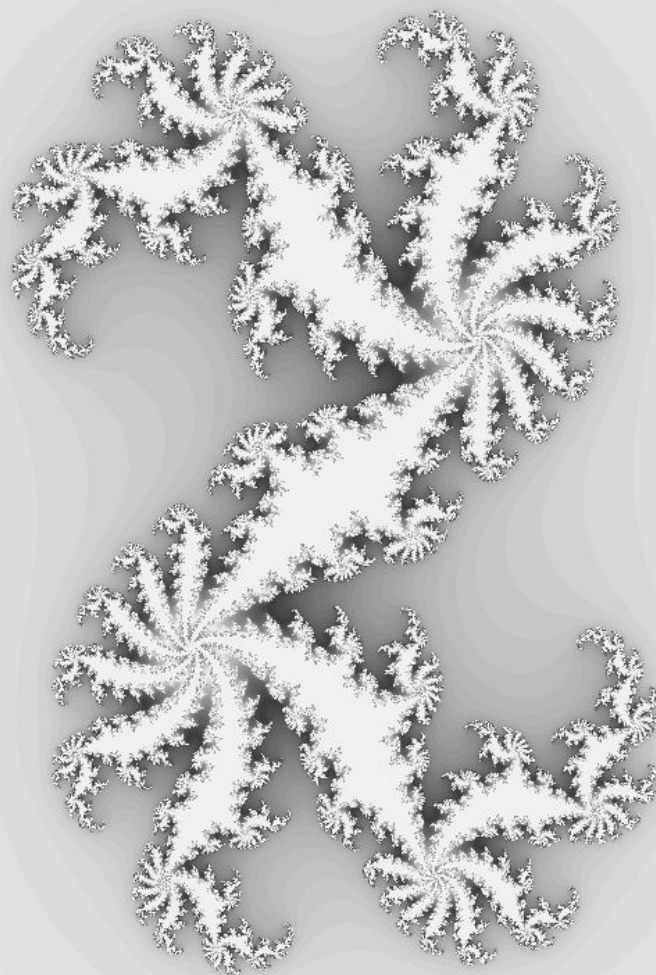
$$c = -0.7 - 0.3i$$



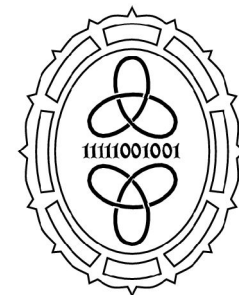
Zbiory Julii



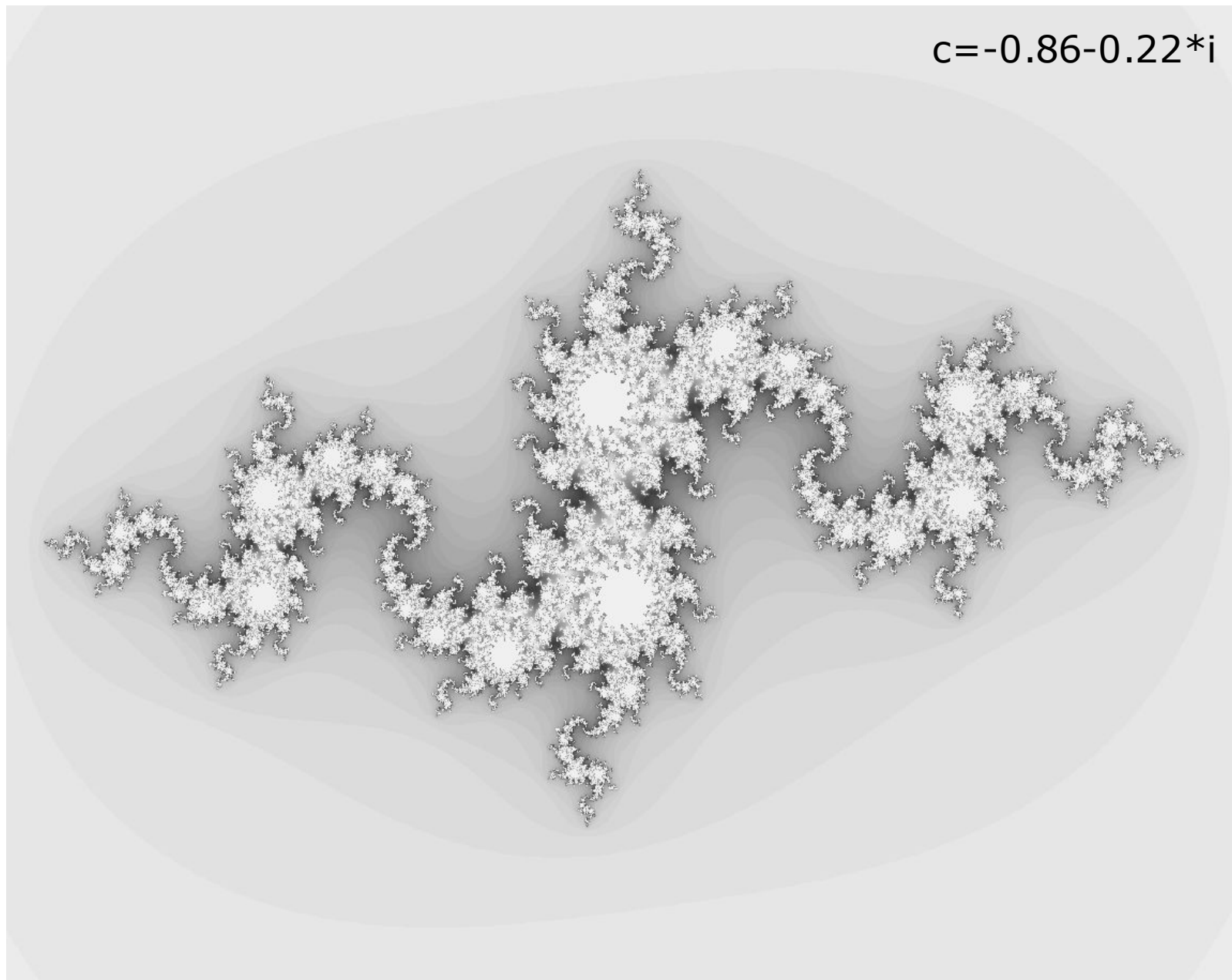
$$c=0.32-0.052*i$$



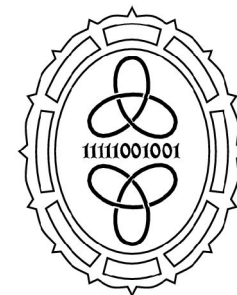
Zbiory Julii



$$c = -0.86 - 0.22i$$



Spójność zbiorów Julii

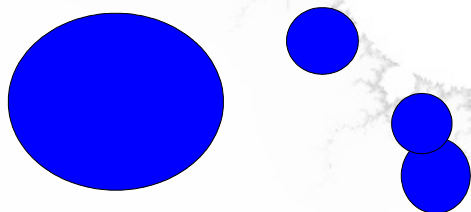


Kiedy zbiór Julii składa się z jednego kawałka?

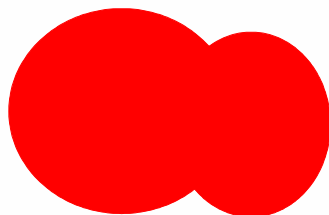
Matematycznie : Kiedy zbiór Julii jest spójny?

Zbiór spójny : "Istnieje łamana, zawarta całkowicie w w tym zbiorze, łącząca dowolne dwa jego punkty".

Przykład 1. Zbiór **niespójny**:



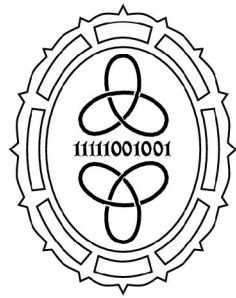
Przykład 2. Zbiór **spójny**:



Przykład 3. Zbiór **całkowicie niespójny** – pojedyncze punkty

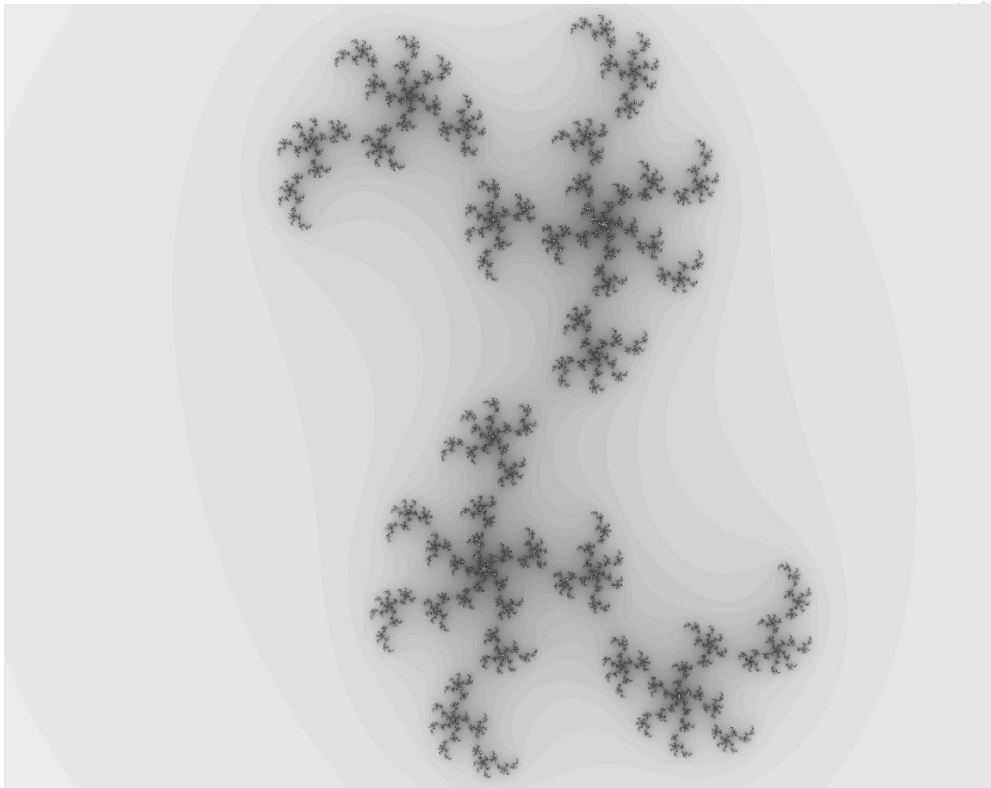


Dychotomia zbiorów Julii



Nietrudno zauważyć, iż dla pewnych parametrów zespolonych c odpowiadający mu zbiór Julii jest spójny, a dla pewnych nie.

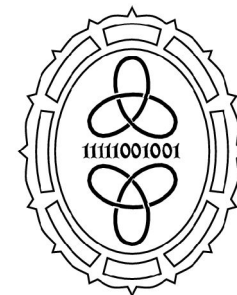
Całkowicie niespójny zbiór
Julii $c=0.45 - 0.31*i$



Spójny zbiór Julii
 $c=-0.82 - 0.1*i$



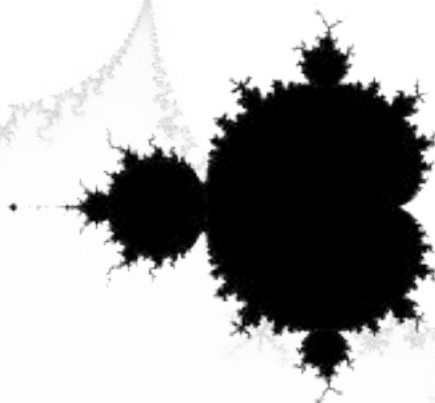
Zbiór M



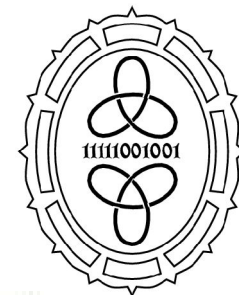
Benoit B. Mandelbrot zadał sobie pytanie "Jak wygląda zbiór tych parametrów c dla których odpowiedni zbiór Julii jest spójny?" pod koniec lat 70 XX wieku.

Z pomocą przyszła grafika komputerowa, w roku 1979 uzyskano pierwsze szkice tego zbioru uzyskane w niskiej rozdzielczości i drukowane na drukarce igłowej...

Jest to chyba najślawniejszy, ale i najbardziej tajemniczy fraktal.



Benoit B. Mandelbrot

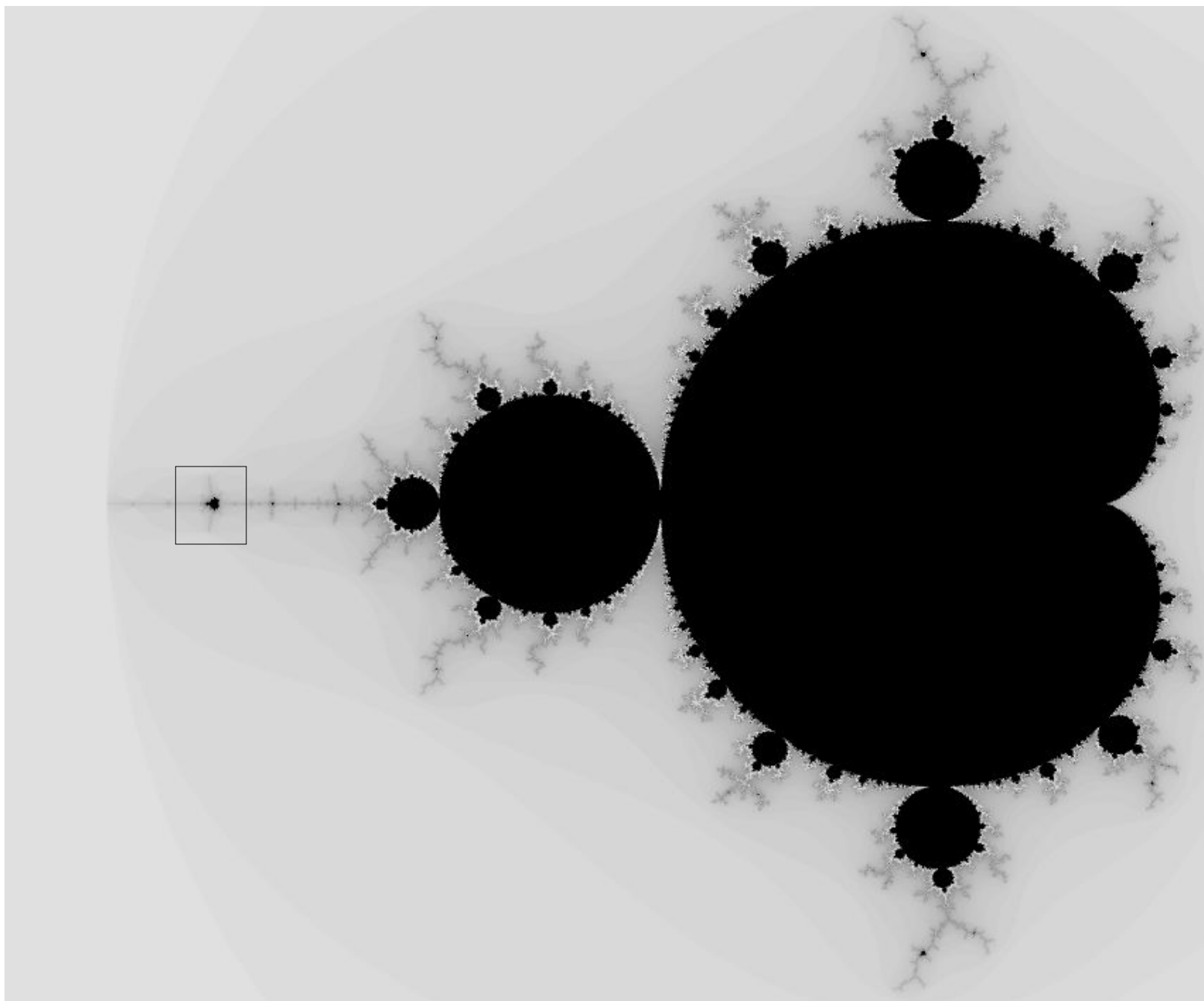
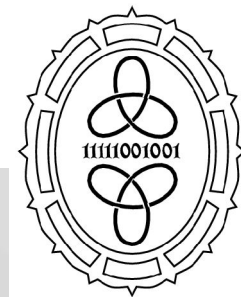


Urodzony w Warszawie w 1924 roku w rodzinie o tradycjach akademickich. W 1936 cała rodzina wyemigrowała do Francji, gdzie Benoit rozpoczął edukację matematyczną.

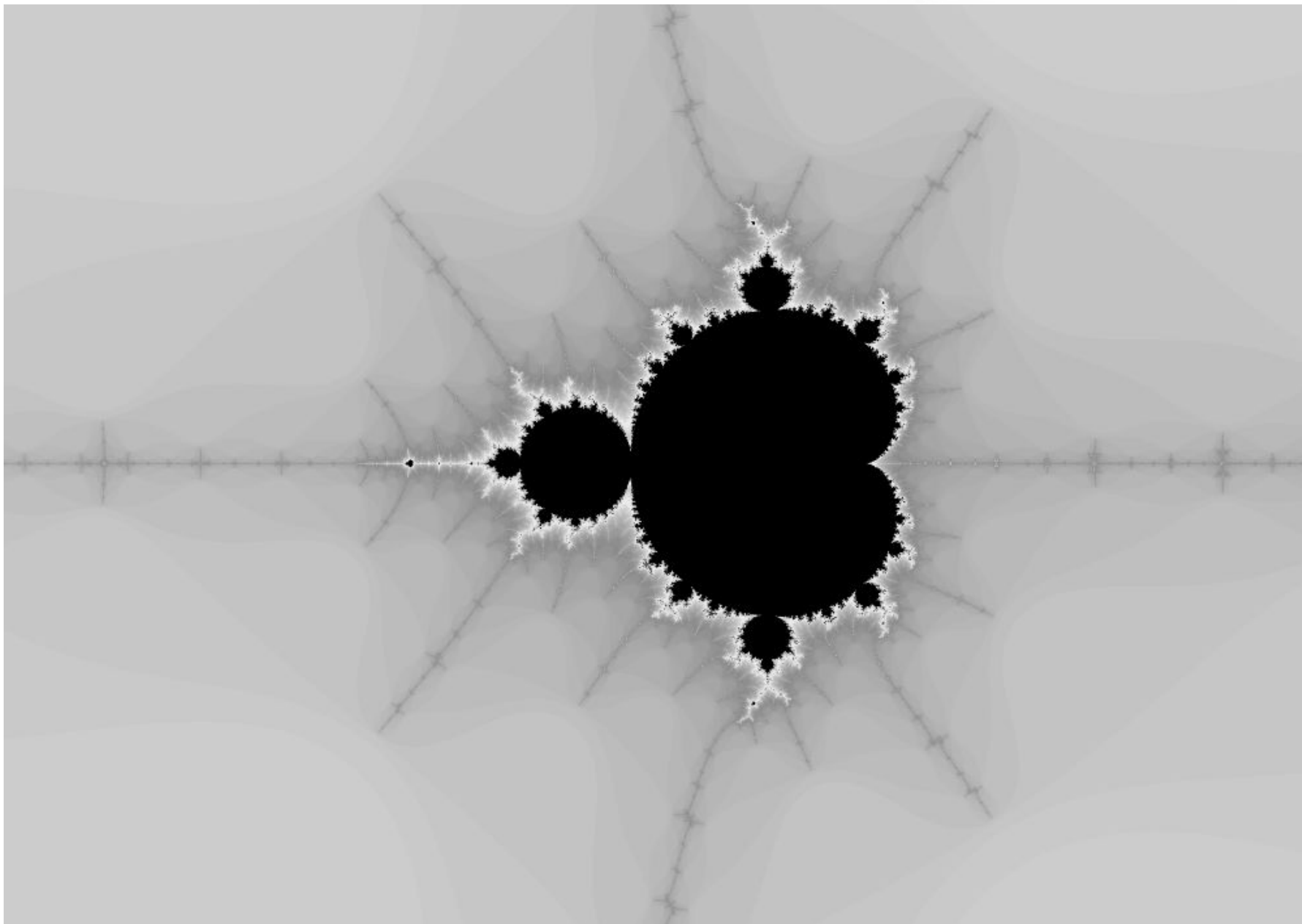
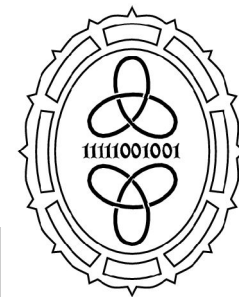
Dzisiaj jest profesorem na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Yale w USA.



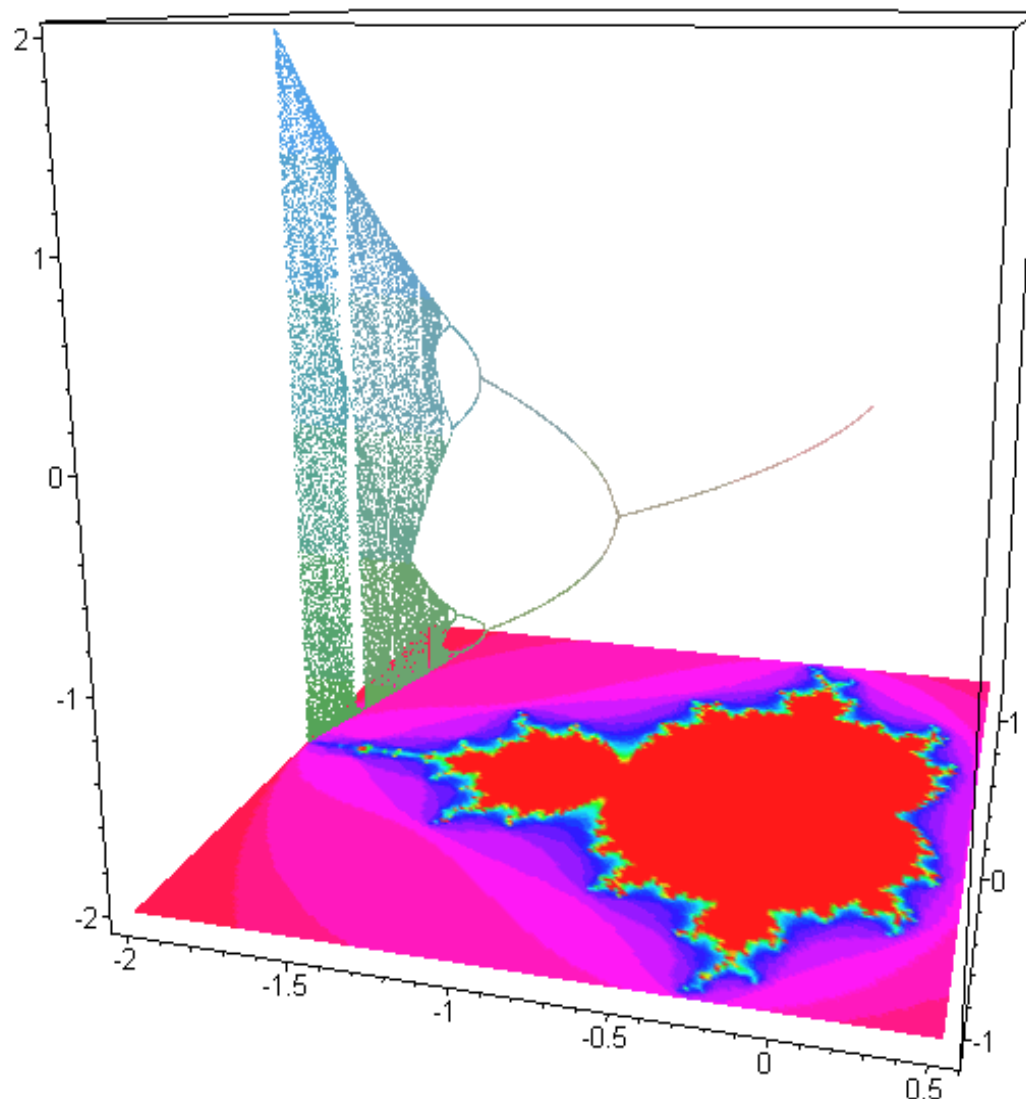
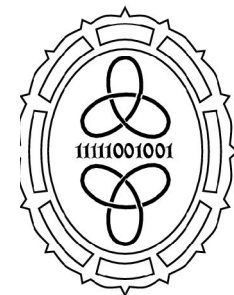
Tajemnice zbioru M



Tajemnice zbioru M



Zbiór M i diagram stanów ustalonych

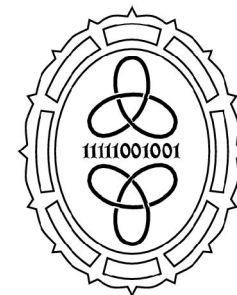


Zbiór M nazywany jest często :

miejscem
geometrycznym
bifurkacji funkcji

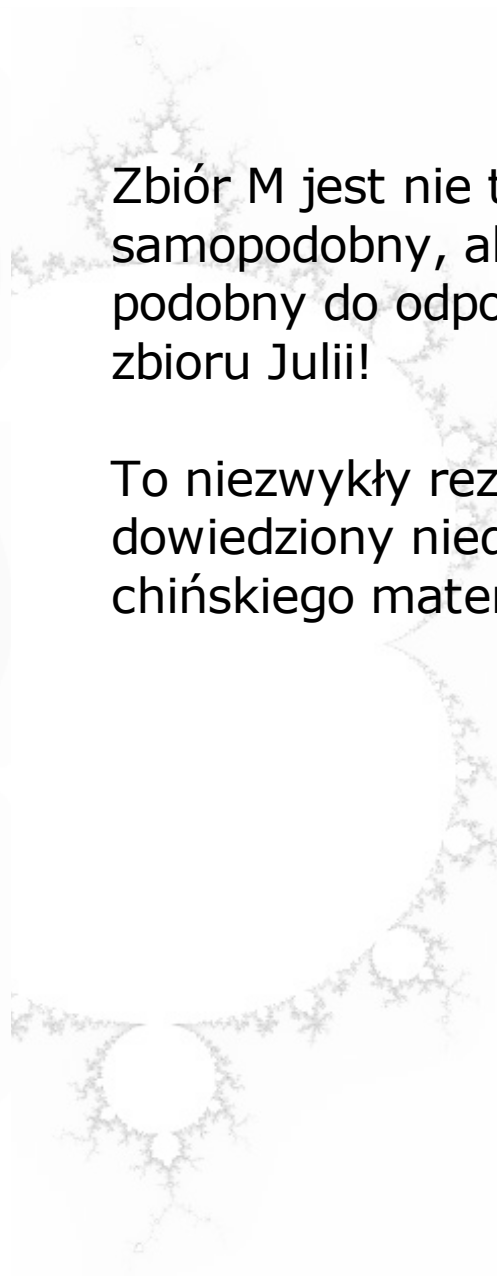
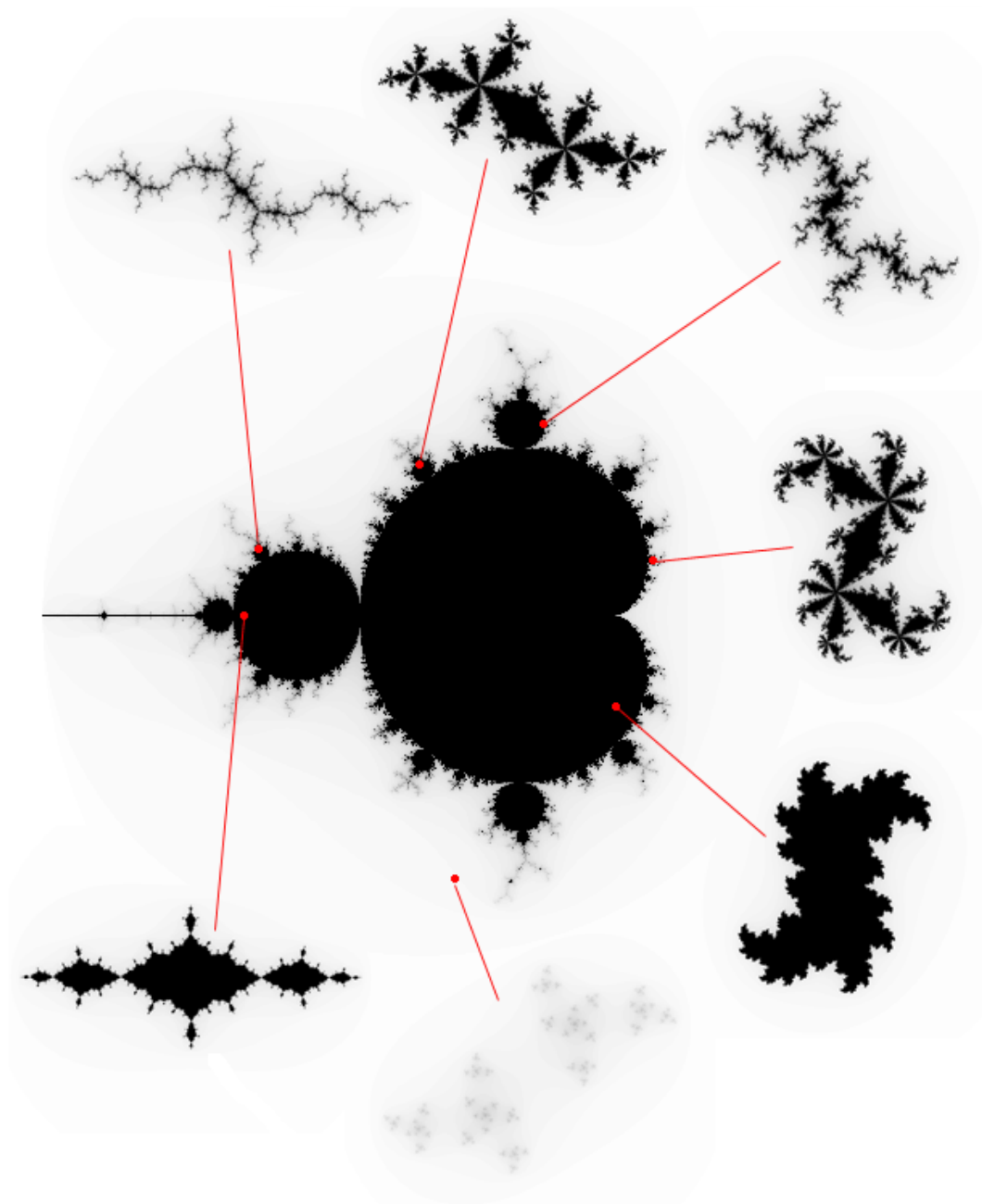
$$f(z) = z^2 + c$$

Zbiór M jako mapa zbiorów Julii

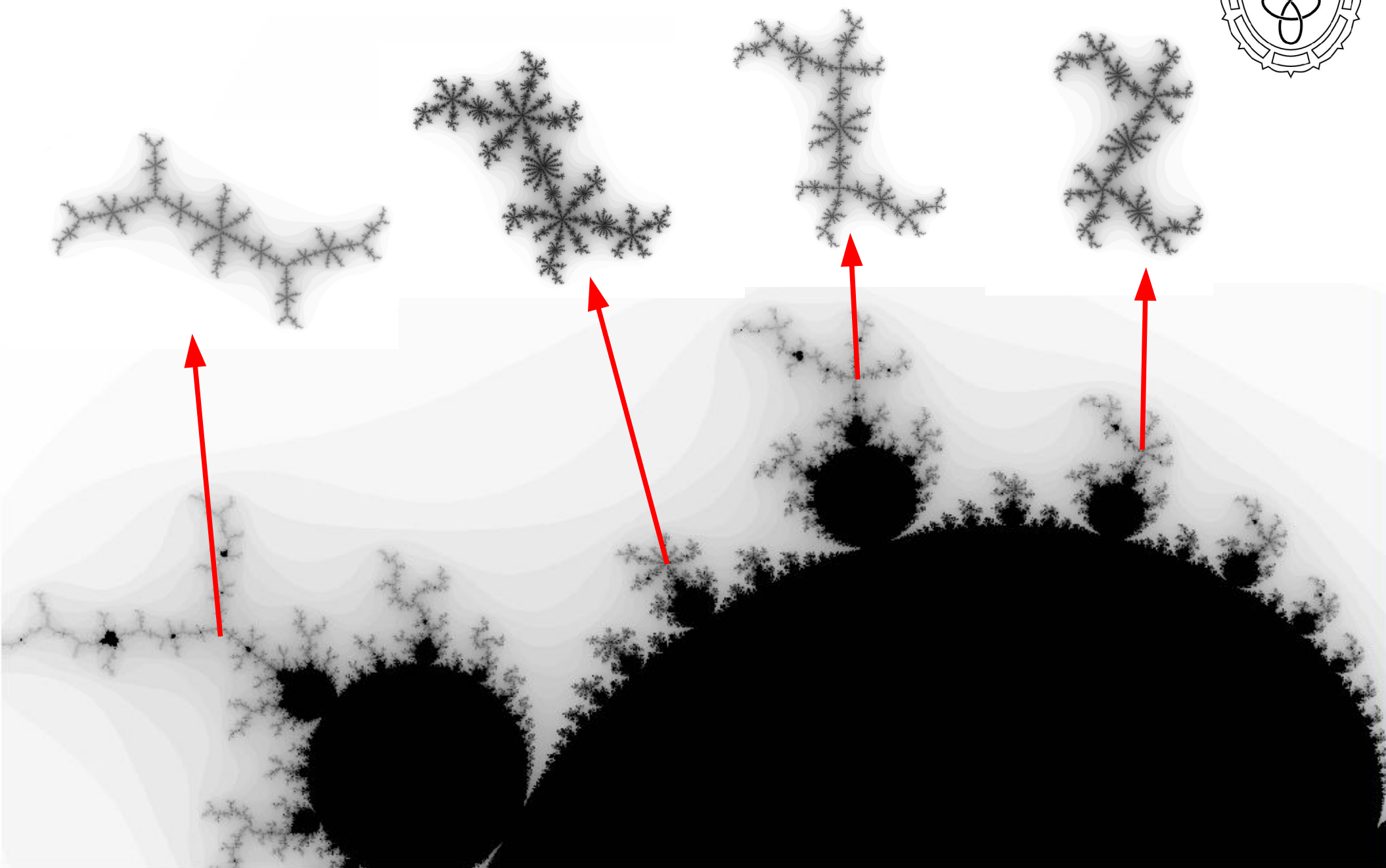
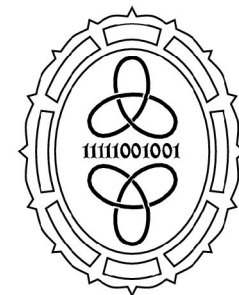


Zbiór M jest nie tylko samopodobny, ale lokalnie jest podobny do odpowiedniego zbioru Julii!

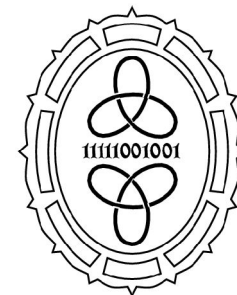
To niezwykle rezultat dowiedziony niedawno przez chińskiego matematyka Tan Lei.



Zbiór M jako mapa zbiorów Julii

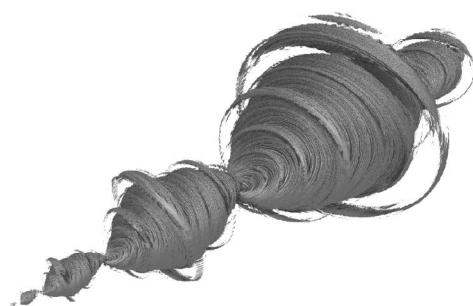


Kwaterniony Hamiltona

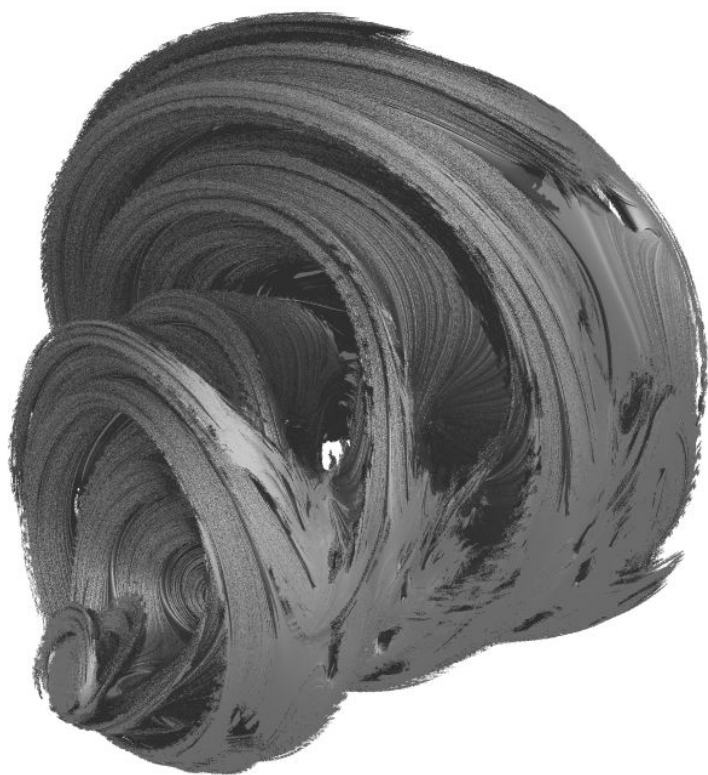
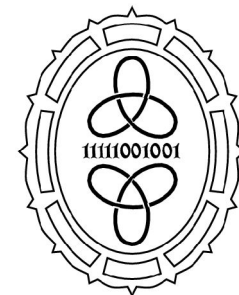


Liczby zespolone można rozszerzyć do 4 wymiarowej struktury algebraicznej zwanej kwaternionami.

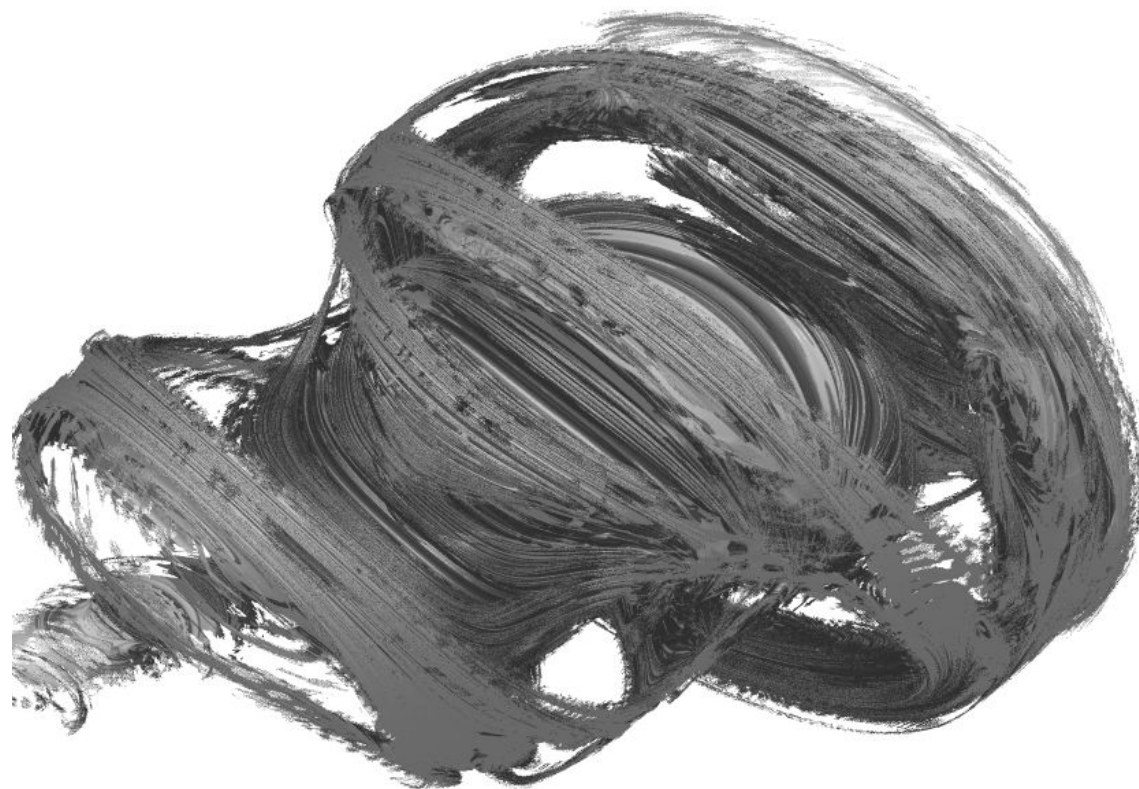
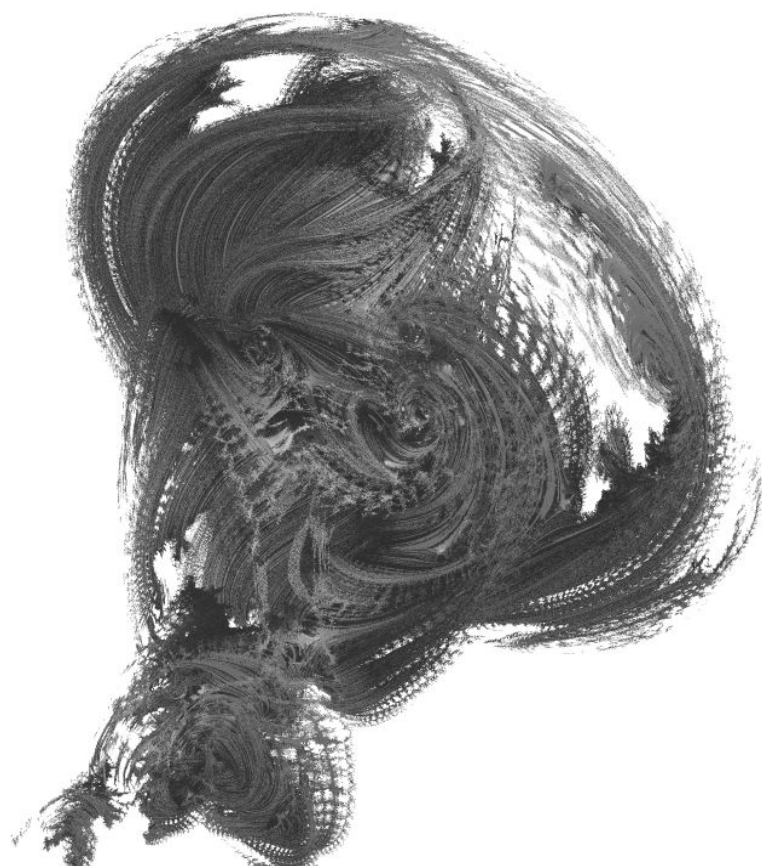
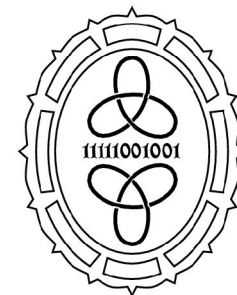
- Rachunki na kwaternionach są dość skomplikowane, w dodatku mnożenie kwaternionów nie jest przemienne!
- Można tworzyć 4 wymiarowe zbiory Julii według tego samego przepisu co w liczbach zespolonych.
- Takie 4 wymiarowe fraktale następnie rzutuje się na przestrzeń 3 wymiarową, aby uzyskać obrazy.



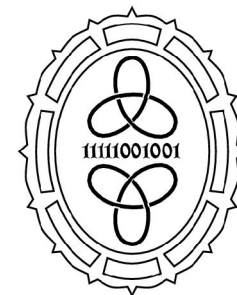
Kwaternionowe zbiory Julii



Kwaternionowe zbiory Julii



Inne fraktale i dziwne atraktory



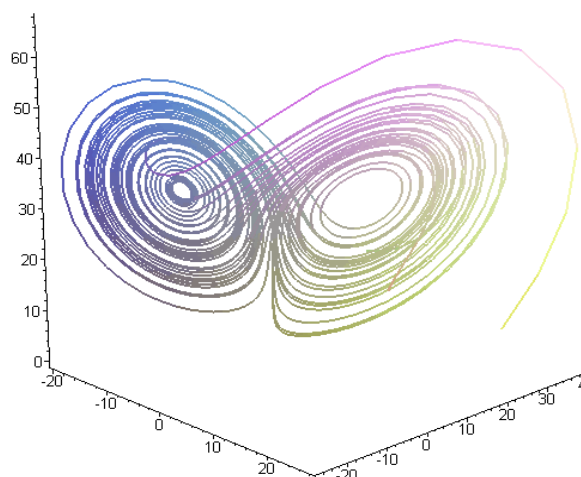
Świat matematyki zna już mnóstwo fraktali. Niektóre z nich są pochodzenia fizycznego:

- **Atraktor Lorenza** to **zbiór niezmienniczy** przekształcenia danego układem równań różniczkowych:

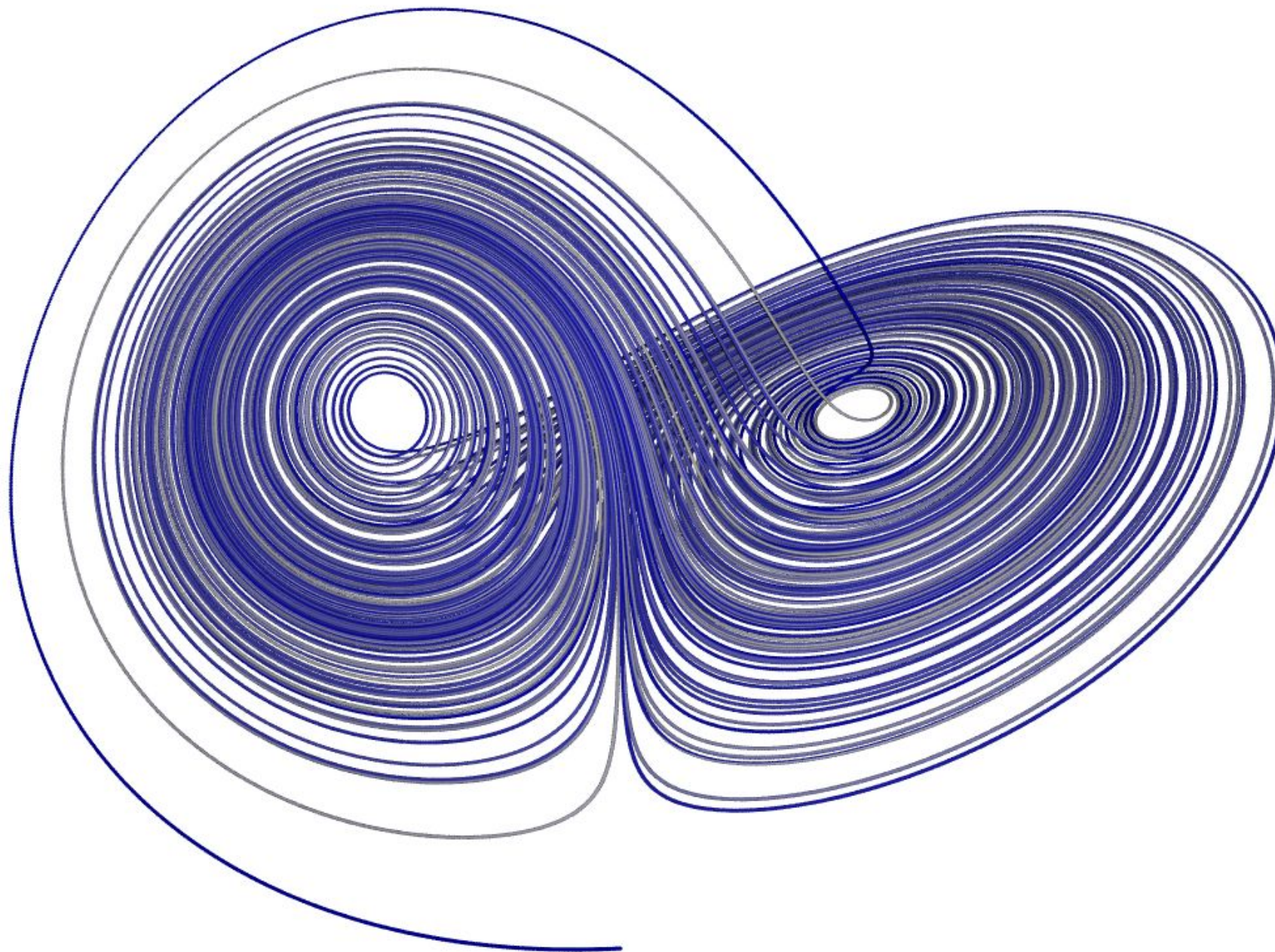
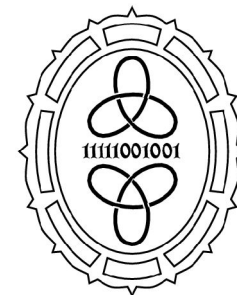
$$\begin{aligned}\frac{\partial x(t)}{\partial t} &= \sigma \cdot (y(t) - x(t)) \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} &= (r - z(t)) \cdot x(t) - y(t) \\ \frac{\partial z(t)}{\partial t} &= x(t) \cdot y(t) - b \cdot z(t)\end{aligned}$$

Pochodzi z równań konwekcji, które wykorzystuje się przy przewidywaniu pogody.

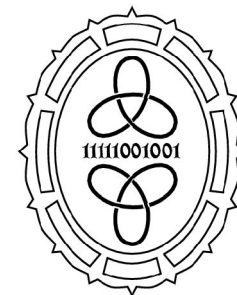
Na rysunki obok - trajektorie w atraktorze Lorenza dla $s=10$, $b=8/3$, $r=35$



Atraktor Lorenza

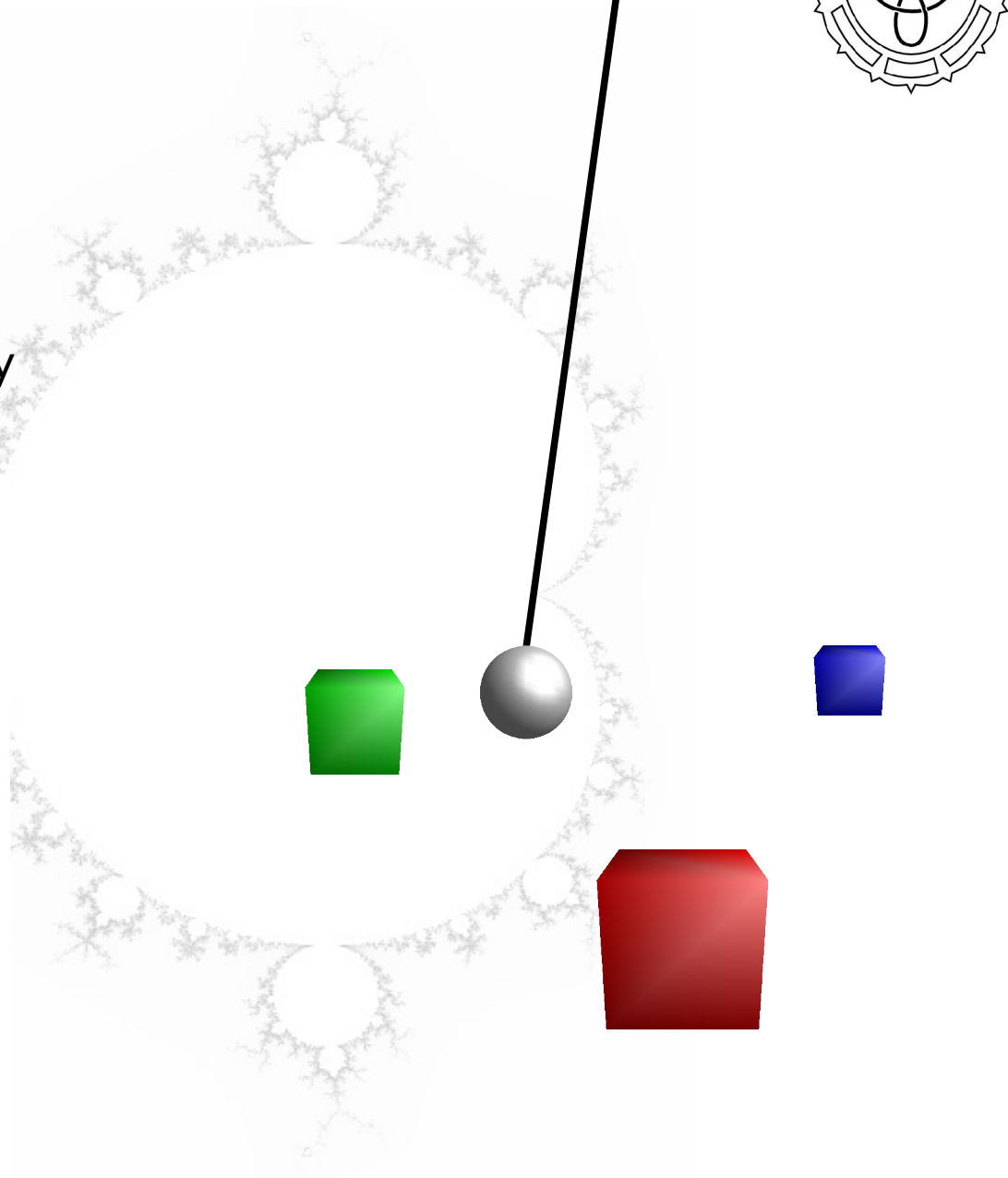
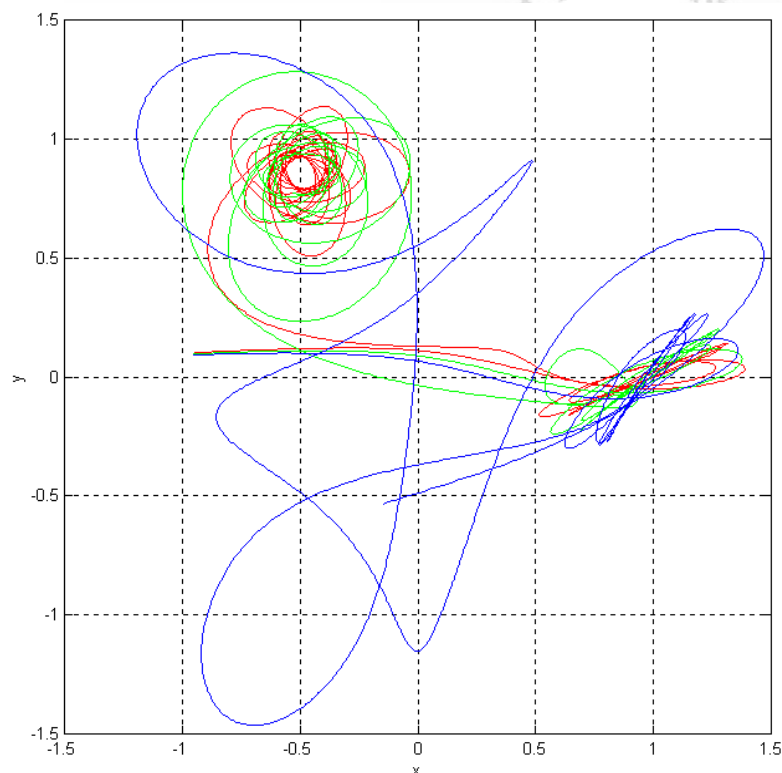


Eksperyment z wahadłem

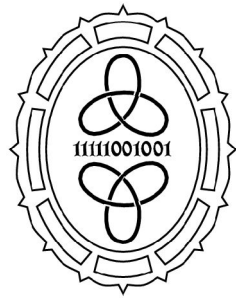


Wyobraźmy sobie stalowe wahadło zawieszone nad 3 magnesami i przyciągane przez nie.

Puszczając wahadło z jakiegoś punktu startowego w końcu zatrzyma się przy jednym z magnesów. Przy którym?



Baseny atrakcji dla magnesów

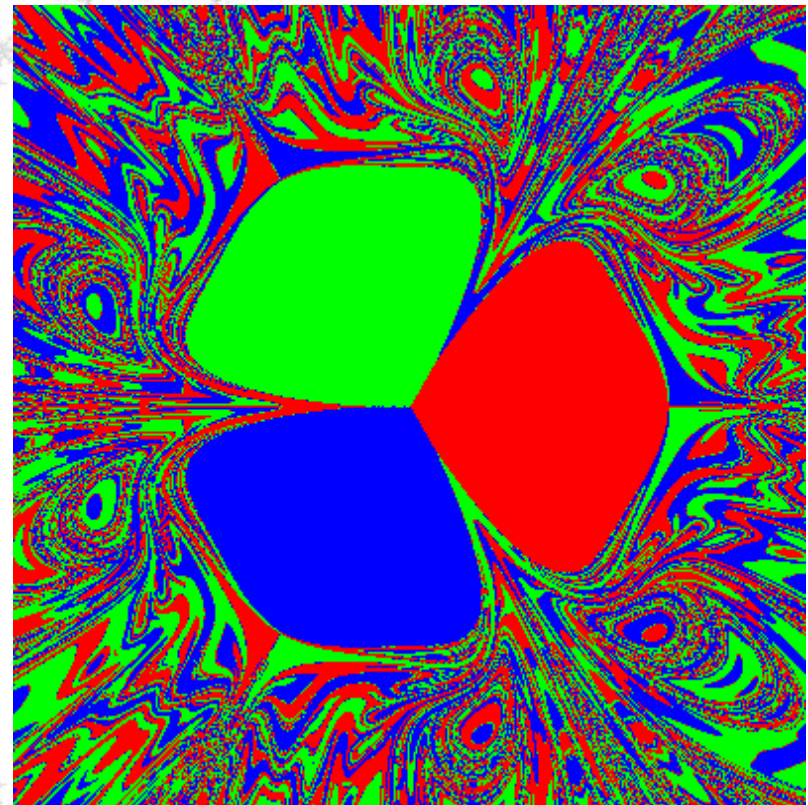


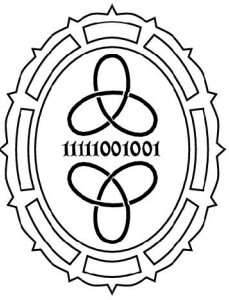
Ruch wahadła jest opisany układ równań różniczkowych:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + R \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t} + C \cdot x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x(t)}{(\sqrt{(x_i - x(t))^2 + (y_i - y(t))^2} + d^2)^3}$$
$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + R \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} + C \cdot y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i - y(t)}{(\sqrt{(x_i - x(t))^2 + (y_i - y(t))^2} + d^2)^3}$$

Po wykonaniu symulacji (wymagającej mnóstwa obliczeń) otrzymamy obraz podobny do tego obok.

Tak zwane **Baseny przyciągania** dla poszczególnych magnesów okazują się mieć naturę fraktalną.

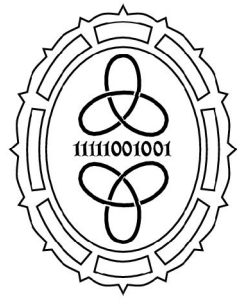




Zastosowanie fraktali

- **[informatyka]** – grafika komputerowa - generowanie sztucznych krajobrazów i roślin
- **[biologia]** - Zastosowanie do klasyfikacji roślin (wymiary fraktalne liści)
- **[informatyka]** - Zastosowania w analizie tekstur, dekompozycja obrazu na podstawie lokalnego wymiaru fraktalnego
- **[informatyka]** - Kompresja fraktalna obrazu (znajdowanie IFS dla zadanego prototypu)
- **[psychologia]** – Generowanie obrazów nie powodujących żadnych skojarzeń
- Wiele innych...

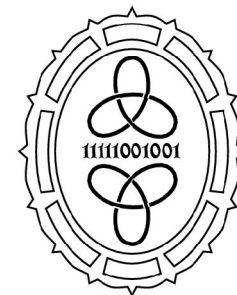
Fraktalne krajobrazy



Które z nich są sztuczne a które prawdziwe?



Koniec



Pytania ?

<http://www.mat.uni.torun.pl/~philip/festiwal.pdf>