



Uniwersyteckie Koło Matematyczne - Tajemnicza liczba e .

Filip Piękniewski

Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
<http://www.mat.umk.pl/~philip>

17 grudnia 2009



Założmy, że mamy 1000 zł. Deponujemy pieniądze w banku, który oferuje oprocentowanie roczne 10% a kapitalizuje odsetki dwa razy w roku. Ile otrzymamy odsetek?

$$1000\text{zł} \cdot \left(1 + \frac{0.1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{0.1}{2}\right) = 1000\text{zł} \cdot \left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 = 1102,50\text{zł}$$

Inny bank oferuje także 10% rocznie ale kapitalizuje 12 razy:

$$1000\text{zł} \cdot \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12} = 1104,71\text{zł}$$

Zatem 2,21zł do przodu.



Założmy, że mamy 1000 zł. Deponujemy pieniądze w banku, który oferuje oprocentowanie roczne 10% a kapitalizuje odsetki dwa razy w roku. Ile otrzymamy odsetek?

$$1000\text{zł} \cdot \left(1 + \frac{0.1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{0.1}{2}\right) = 1000\text{zł} \cdot \left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 = 1102,50\text{zł}$$

Inny bank oferuje także 10% rocznie ale kapitalizuje 12 razy:

$$1000\text{zł} \cdot \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12} = 1104,71\text{zł}$$

Zatem 2,21zł do przodu.



Po długich poszukiwaniach znajdujemy bank który daje 10% ale kapitalizuje codziennie (365 razy w roku)!

$$1000\text{zł} \cdot \left(1 + \frac{0.1}{365}\right)^{365} = 1105,16\text{zł}$$

Zatem zyskujemy 2,66zł w stosunku do pierwszego banku i 45gr w stosunku do drugiego banku.

Czy zatem bank który będzie stale kapitalizował odsetki (np. kilka razy na sekundę) zapłaci nam jeszcze więcej? A jeśli tak, to jak dużego zysku możemy się spodziewać?



Aby odpowiedzieć na pytanie dotyczące banków zajmijmy się na jakiś czas liczbami:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25 \qquad \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.3704$$

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = 2.4414 \qquad \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2.4883$$

$$\left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 = 2.5216 \qquad \left(1 + \frac{1}{25}\right)^{25} = 2.6658$$

Wszystkie są elementami ciągu

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Jakie własności ma ten ciąg?



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący.

DOWÓD.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący.

DOWÓD.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 \left(\frac{1}{n}\right)^0 + n \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n!}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \end{aligned}$$



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący.

DOWÓD.

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\&= 1 \left(\frac{1}{n}\right)^0 + n \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n!}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\&= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!}\end{aligned}$$



DOWÓD. Analogicznie

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$$



DOWÓD. Analogicznie

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \\ &= 1 \left(\frac{1}{n+1}\right)^0 + (n+1) \left(\frac{1}{n+1}\right)^1 + \frac{(n+1)n}{2!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{(n+1)\dots 2}{n!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \end{aligned}$$



DOWÓD. Analogicznie

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \\&= 1 \left(\frac{1}{n+1}\right)^0 + (n+1) \left(\frac{1}{n+1}\right)^1 + \frac{(n+1)n}{2!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \dots \\&\dots + \frac{(n+1)\dots 2}{n!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \\&= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} + \\&+ \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}\end{aligned}$$



DOWÓD. Mamy zatem

$$1 \leq 1$$

ostatecznie

$$a_n < a_{n+1}$$





DOWÓD. Mamy zatem

$$1 \leq 1$$
$$\frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} \leq \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!}$$

ostatecznie

$$a_n < a_{n+1}$$



DOWÓD. Mamy zatem

$$\begin{aligned} 1 &\leq 1 \\ \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} &\leq \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} \\ &\vdots \\ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} &\leq \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} \end{aligned}$$

ostatecznie

$$a_n < a_{n+1}$$





DOWÓD. Mamy zatem

$$\begin{aligned}1 &\leq 1 \\ \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} &\leq \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} \\ &\vdots \\ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} &\leq \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} \\ 0 &< \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}\end{aligned}$$

ostatecznie

$$a_n < a_{n+1}$$



DOWÓD. Mamy zatem

$$\begin{aligned}1 &\leq 1 \\ \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} &\leq \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} \\ &\vdots \\ \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} &\leq \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} \\ 0 &< \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}\end{aligned}$$

ostatecznie

$$a_n < a_{n+1}$$



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony z góry przez 3.

DOWÓD.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony z góry przez 3.

DOWÓD.

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\&= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} \leqslant\end{aligned}$$



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony z góry przez 3.

DOWÓD.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \end{aligned}$$



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony z góry przez 3.

DOWÓD.

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\&= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} \leqslant \\&\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant \\&\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} < 3\end{aligned}$$



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony z góry przez 3.

DOWÓD.

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\&= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!} \leqslant \\&\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leqslant \\&\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} < \\&< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3\end{aligned}$$



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny (posiada granicę)

DOWÓD. Kolejne elementy ciągu rosną, jednak żaden nigdy nie przekroczy 3. Zatem istnieje pewna liczba $g \leq 3$ (granica), przy której nieskończenie wiele elementów ciągu musi się skupiać. ■

Zdefiniujmy zatem liczbę e jako granicę tego ciągu

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Z obliczeń na komputerze wynika, że $e \approx 2.7183...$ Liczbę e czasem nazywa się liczbą Napera.



Twierdzenie

Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny (posiada granicę)

DOWÓD. Kolejne elementy ciągu rosną, jednak żaden nigdy nie przekroczy 3. Zatem istnieje pewna liczba $g \leq 3$ (granica), przy której nieskończenie wiele elementów ciągu musi się skupiać. ■

Zdefiniujmy zatem liczbę e jako granicę tego ciągu

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Z obliczeń na komputerze wynika, że $e \approx 2.7183\dots$. Liczbę e czasem nazywa się liczbą Napera.



Zobaczmy jak obliczać potęgi liczby e . Na przykład, ile to jest w przybliżeniu e^5 ? Wiemy, że dla dużych n

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

weźmy np. $n=1000$. Zatem

$$e^5 \approx \left(\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^5 = \left(1 + \frac{5}{5000}\right)^{5000} \approx \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{1000}$$

Ogólnie dla dużych n

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



Zobaczmy jak obliczać potęgi liczby e . Na przykład, ile to jest w przybliżeniu e^5 ? Wiemy, że dla dużych n

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

weźmy np. $n=1000$. Zatem

$$e^5 \approx \left(\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^5 = \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{5000} \approx \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{1000}$$

Ogólnie dla dużych n

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



Zobaczmy jak obliczać potęgi liczby e . Na przykład, ile to jest w przybliżeniu e^5 ? Wiemy, że dla dużych n

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

weźmy np. $n=1000$. Zatem

$$e^5 \approx \left(\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \right)^5 = \left(1 + \frac{5}{5000}\right)^{5000} \approx \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{1000}$$

Ogólnie dla dużych n

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



Zobaczmy jak obliczać potęgi liczby e . Na przykład, ile to jest w przybliżeniu e^5 ? Wiemy, że dla dużych n

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

weźmy np. $n=1000$. Zatem

$$e^5 \approx \left(\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^5 = \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{5000} \approx \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{1000}$$

Ogólnie dla dużych n

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



Zobaczmy jak obliczać potęgi liczby e . Na przykład, ile to jest w przybliżeniu e^5 ? Wiemy, że dla dużych n

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

weźmy np. $n=1000$. Zatem

$$e^5 \approx \left(\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}\right)^5 = \left(1 + \frac{5}{5000}\right)^{5000} \approx \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{1000}$$

Ogólnie dla dużych n

$$e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



Popatrzmy na pewne wyliczenia, szczególną uwagę kierując na współczynniki przed x^k

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{5}\right)^5 &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{5(5-1)}{5^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{5(5-1)(5-2)}{5^3} x^3 + \\ &+ \frac{1}{4!} \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{5^4} x^4 + \frac{1}{5!} \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5^5} x^5 = \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{20}{25} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{60}{125} x^3 + \frac{1}{4!} \frac{120}{625} x^4 + \frac{1}{5!} \frac{120}{3125} x^5\end{aligned}$$



Popatrzmy na pewne wyliczenia, szczególną uwagę kierując na współczynniki przed x^k

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{5}\right)^5 &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{5(5-1)}{5^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{5(5-1)(5-2)}{5^3} x^3 + \\ &+ \frac{1}{4!} \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{5^4} x^4 + \frac{1}{5!} \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{5^5} x^5 = \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{20}{25} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{60}{125} x^3 + \frac{1}{4!} \frac{120}{625} x^4 + \frac{1}{5!} \frac{120}{3125} x^5\end{aligned}$$



Popatrzmy na pewne wyliczenia, szczególną uwagę kierując na współczynniki przed x^k

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{10}\right)^{10} &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{10(10-1)}{10^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{10(10-1)(10-2)}{10^3} x^3 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{90}{100} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{720}{1000} x^3 + \frac{1}{4!} \frac{5040}{10000} x^4 + \frac{1}{5!} \frac{30240}{100000} x^5 + \\ &+ \frac{1}{6!} \frac{151200}{1000000} x^6 + \frac{1}{7!} \frac{604800}{10000000} x^7 + \frac{1}{8!} \frac{1814400}{100000000} x^8 + \dots\end{aligned}$$



Popatrzmy na pewne wyliczenia, szczególną uwagę kierując na współczynniki przed x^k

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{10}\right)^{10} &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{10(10-1)}{10^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{10(10-1)(10-2)}{10^3} x^3 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{90}{100} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{720}{1000} x^3 + \frac{1}{4!} \frac{5040}{10000} x^4 + \frac{1}{5!} \frac{30240}{100000} x^5 + \\ &+ \frac{1}{6!} \frac{151200}{1000000} x^6 + \frac{1}{7!} \frac{604800}{10000000} x^7 + \frac{1}{8!} \frac{1814400}{100000000} x^8 + \dots\end{aligned}$$



Popatrzmy na pewne wyliczenia, szczególną uwagę kierując na współczynniki przed x^k

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{100} &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{100(100-1)}{100^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{100(100-1)(100-2)}{100^3} x^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} 0.99 x^2 + \frac{1}{3!} 0.9702 x^3 + \frac{1}{4!} 0.94109 x^4 + \frac{1}{5!} 0.90345 x^5 + \\ &+ \frac{1}{6!} 0.85828 x^6 + \frac{1}{7!} 0.80678 x^7 + \frac{1}{8!} 0.75031 x^8 + \dots\end{aligned}$$



Popatrzymy na pewne wyliczenia, szczególną uwagę kierując na współczynniki przed x^k

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{100} &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{100(100-1)}{100^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{100(100-1)(100-2)}{100^3} x^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} 0.99 x^2 + \frac{1}{3!} 0.9702 x^3 + \frac{1}{4!} 0.94109 x^4 + \frac{1}{5!} 0.90345 x^5 + \\ &+ \frac{1}{6!} 0.85828 x^6 + \frac{1}{7!} 0.80678 x^7 + \frac{1}{8!} 0.75031 x^8 + \dots\end{aligned}$$



Popatrzmy na pewne wyliczenia, szczególną uwagę kierując na współczynniki przed x^k

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{1000}\right)^{1000} &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{1000(1000-1)}{1000^2} x^2 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} 0.999 x^2 + \frac{1}{3!} 0.997 x^3 + \frac{1}{4!} 0.994 x^4 + \frac{1}{5!} 0.99 x^5 + \\ &+ \frac{1}{6!} 0.985 x^6 + \frac{1}{7!} 0.979 x^7 + \frac{1}{8!} 0.972 x^8 + \dots\end{aligned}$$



Popatrzymy na pewne wyliczenia, szczególną uwagę kierując na współczynniki przed x^k

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{1000}\right)^{1000} &= 1 + x + \frac{1}{2!} \frac{1000(1000-1)}{1000^2} x^2 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} 0.999 x^2 + \frac{1}{3!} 0.997 x^3 + \frac{1}{4!} 0.994 x^4 + \frac{1}{5!} 0.99 x^5 + \\ &+ \frac{1}{6!} 0.985 x^6 + \frac{1}{7!} 0.979 x^7 + \frac{1}{8!} 0.972 x^8 + \dots\end{aligned}$$



Rozwijając kolejne wartości $e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ze wzoru dwumianowego Newtona dochodzimy do ciekawej równości

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

W szczególności:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Pozwala to poznać nowe własności liczby e.



Rozwijając kolejne wartości $e^x \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ze wzoru dwumianowego Newtona dochodzimy do ciekawej równości

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

W szczególności:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Pozwala to poznać nowe własności liczby e.



Twierdzenie

Liczba e jest niewymierna.

DOWÓD. Przez sprzeczność. Załóżmy, że $e = \frac{p}{q}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $q = k!$ dla pewnego k . Mamy

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \dots$$

Pierwszych $k+1$ wyrazów możemy sprowadzić do wspólnego mianownika $k! = q$

$$e = \frac{(\dots)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \dots = e = \frac{(\dots)}{k!} + c$$

Jednak skoro $e = \frac{p}{q} = \frac{p}{k!} = \frac{(\dots)}{k!} + c$ to oznacza, że $c \geq \frac{1}{k!}$



Twierdzenie

Liczba e jest niewymierna.

DOWÓD. Przez sprzeczność. Załóżmy, że $e = \frac{p}{q}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $q = k!$ dla pewnego k . Mamy

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \dots$$

Pierwszych $k+1$ wyrazów możemy sprowadzić do wspólnego mianownika $k! = q$

$$e = \frac{(\dots)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \dots = e = \frac{(\dots)}{k!} + c$$

Jednak skoro $e = \frac{p}{q} = \frac{p}{k!} = \frac{(\dots)}{k!} + c$ to oznacza, że $c \geq \frac{1}{k!}$



Twierdzenie

Liczba e jest niewymierna.

DOWÓD. Przez sprzeczność. Załóżmy, że $e = \frac{p}{q}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $q = k!$ dla pewnego k . Mamy

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \dots$$

Pierwszych $k+1$ wyrazów możemy sprowadzić do wspólnego mianownika $k! = q$

$$e = \frac{(\dots)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \dots = e = \frac{(\dots)}{k!} + c$$

Jednak skoro $e = \frac{p}{q} = \frac{p}{k!} = \frac{(\dots)}{k!} + c$ to oznacza, że $c \geq \frac{1}{k!}$



Twierdzenie

Liczba e jest niewymierna.

DOWÓD. Przez sprzeczność. Załóżmy, że $e = \frac{p}{q}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $q = k!$ dla pewnego k . Mamy

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \dots$$

Pierwszych $k+1$ wyrazów możemy sprowadzić do wspólnego mianownika $k! = q$

$$e = \frac{(\dots)}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \dots = e = \frac{(\dots)}{k!} + c$$

Jednak skoro $e = \frac{p}{q} = \frac{p}{k!} = \frac{(\dots)}{k!} + c$ to oznacza, że $c \geq \frac{1}{k!}$



DOWÓD. Mamy jednak

$$c = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \dots =$$

Zatem $c \leq \frac{1}{k \cdot k!} < \frac{1}{k!}$, sprzeczność z założeniem, że e jest wymierne!





DOWÓD. Mamy jednak

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \dots = \\&= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots \right) \leq\end{aligned}$$

Zatem $c \leq \frac{1}{k \cdot k!} < \frac{1}{k!}$, sprzeczność z założeniem, że e jest wymierne!





DOWÓD. Mamy jednak

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \dots = \\&= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots \right) \leq \\&\leq \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3} + \dots \right) =\end{aligned}$$

Zatem $c \leq \frac{1}{k \cdot k!} < \frac{1}{k!}$, sprzeczność z założeniem, że e jest wymierne!





DOWÓD. Mamy jednak

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \dots = \\&= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots \right) \leq \\&\leq \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3} + \dots \right) = \\&= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} \right) \right) = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{k+1}{k} \right) \right) = \frac{1}{k \cdot k!}\end{aligned}$$

Zatem $c \leq \frac{1}{k \cdot k!} < \frac{1}{k!}$, sprzeczność z założeniem, że e jest wymierne!





DOWÓD. Mamy jednak

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \frac{1}{(k+3)!} + \dots = \\&= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} + \dots \right) \leq \\&\leq \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^3} + \dots \right) = \\&= \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k+1}} \right) \right) = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{k+1} \left(\frac{k+1}{k} \right) \right) = \frac{1}{k \cdot k!}\end{aligned}$$

Zatem $c \leq \frac{1}{k \cdot k!} < \frac{1}{k!}$, sprzeczność z założeniem, że e jest wymierne! ■



Powtórka

- Liczba e jest granicą ciągu $(1 + \frac{1}{n})^n$. Ciąg ten jest zbieżny, gdyż jest rosnący i ograniczony z góry.
- Potęgi e^x są granicami nieco zmodyfikowanego ciągu $(1 + \frac{x}{n})^n$
- Wykorzystując dwumian Newtona otrzymujemy, że

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

- W szczególności

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Co można wykorzystać aby udowodnić, że e jest liczbą niewymierną.



Powtórka

- Liczba e jest granicą ciągu $(1 + \frac{1}{n})^n$. Ciąg ten jest zbieżny, gdyż jest rosnący i ograniczony z góry.
- Potęgi e^x są granicami nieco zmodyfikowanego ciągu $(1 + \frac{x}{n})^n$
- Wykorzystując dwumian Newtona otrzymujemy, że

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

- W szczególności

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Co można wykorzystać aby udowodnić, że e jest liczbą niewymierną.



Powtórka

- Liczba e jest granicą ciągu $(1 + \frac{1}{n})^n$. Ciąg ten jest zbieżny, gdyż jest rosnący i ograniczony z góry.
- Potęgi e^x są granicami nieco zmodyfikowanego ciągu $(1 + \frac{x}{n})^n$
- Wykorzystując dwumian Newtona otrzymujemy, że

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

- W szczególności

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Co można wykorzystać aby udowodnić, że e jest liczbą niewymierną.



Powtórka

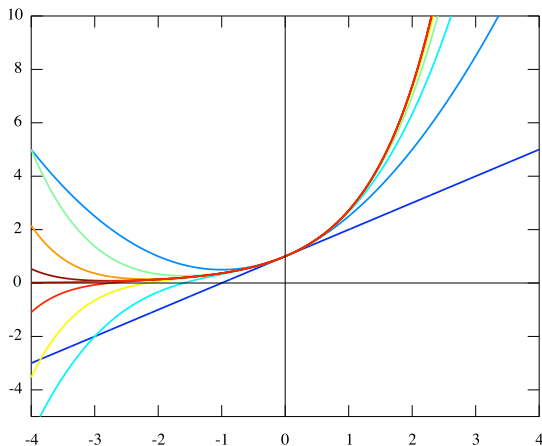
- Liczba e jest granicą ciągu $(1 + \frac{1}{n})^n$. Ciąg ten jest zbieżny, gdyż jest rosnący i ograniczony z góry.
- Potęgi e^x są granicami nieco zmodyfikowanego ciągu $(1 + \frac{x}{n})^n$
- Wykorzystując dwumian Newtona otrzymujemy, że

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

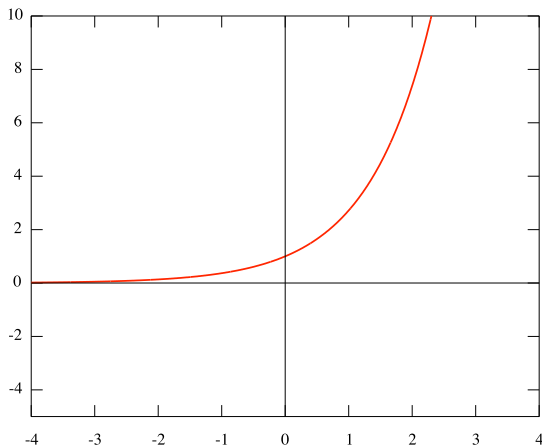
- W szczególności

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Co można wykorzystać aby udowodnić, że e jest liczbą niewymierną.



Rysunek: Kolejne wielomianowe przybliżenia funkcji wykładniczej e^x oraz wykres jej samej.



Rysunek: Kolejne wielomianowe przybliżenia funkcji wykładniczej e^x oraz wykres jej samej.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wszyscy wiemy, że równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązań wśród liczb rzeczywistych.
- Podobnie równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązania wśród liczb wymiernych
- W drugim przypadku jednak uznajemy za sensowne uzupełnienie liczb wymiernych o element $\sqrt{2}$, który jest rozwiązaniem równania. Zasadniczo nie przeszkadza nam, że owej liczby nie da się nawet zapisać w formacie dziesiętnym - potrzeba nieskończenie wiele miejsc!
- Może zatem da się uzupełnić liczby rzeczywiste o element $\sqrt{-1}$? Co prawda nie umiemy go wyrazić za pomocą liczb rzeczywistych, ale wiadomo jak ten dziwny element ma się zachowywać w przekształceniach!



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wszyscy wiemy, że równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązań wśród liczb rzeczywistych.
- Podobnie równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązania wśród liczb wymiernych
- W drugim przypadku jednak uznajemy za sensowne uzupełnienie liczb wymiernych o element $\sqrt{2}$, który jest rozwiązaniem równania. Zasadniczo nie przeszkadza nam, że owej liczby nie da się nawet zapisać w formacie dziesiętnym - potrzeba nieskończenie wiele miejsc!
- Może zatem da się uzupełnić liczby rzeczywiste o element $\sqrt{-1}$? Co prawda nie umiemy go wyrazić za pomocą liczb rzeczywistych, ale wiadomo jak ten dziwny element ma się zachowywać w przekształceniach!



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wszyscy wiemy, że równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązań wśród liczb rzeczywistych.
- Podobnie równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązania wśród liczb wymiernych
- W drugim przypadku jednak uznajemy za sensowne uzupełnienie liczb wymiernych o element $\sqrt{2}$, który jest rozwiązaniem równania. Zasadniczo nie przeszkadza nam, że owej liczby nie da się nawet zapisać w formacie dziesiętnym - potrzeba nieskończenie wiele miejsc!
- Może zatem da się uzupełnić liczby rzeczywiste o element $\sqrt{-1}$? Co prawda nie umiemy go wyrazić za pomocą liczb rzeczywistych, ale wiadomo jak ten dziwny element ma się zachowywać w przekształceniach!



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wszyscy wiemy, że równanie $x^2 = -1$ nie ma rozwiązań wśród liczb rzeczywistych.
- Podobnie równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązania wśród liczb wymiernych
- W drugim przypadku jednak uznajemy za sensowne uzupełnienie liczb wymiernych o element $\sqrt{2}$, który jest rozwiązaniem równania. Zasadniczo nie przeszkadza nam, że owej liczby nie da się nawet zapisać w formacie dziesiętnym - potrzeba nieskończenie wiele miejsc!
- Może zatem da się uzupełnić liczby rzeczywiste o element $\sqrt{-1}$? Co prawda nie umiemy go wyrazić za pomocą liczb rzeczywistych, ale wiadomo jak ten dziwny element ma się zachowywać w przekształceniach!



Liczby zespolone - szybki kurs

- Do swobodnego operowania $\sqrt{2}$ wystarczy nam jedynie wiedza, iż

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

- Oczywiście analogicznie:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

- Okazuje się, że $\sqrt{-1}$ nie jest wcale bardziej tajemniczy niż $\sqrt{2}$. Tego pierwszego nie znajdziemy wśród liczb rzeczywistych, tego drugiego wśród wymiernych. Jedyna różnica która powoduje, że $\sqrt{2}$ jest nam łatwiej zaakceptować, to fakt iż można go **przybliżyć** liczbami wymiernymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Do swobodnego operowania $\sqrt{2}$ wystarczy nam jedynie wiedza, iż

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

- Oczywiście analogicznie:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

- Okazuje się, że $\sqrt{-1}$ nie jest wcale bardziej tajemniczy niż $\sqrt{2}$. Tego pierwszego nie znajdziemy wśród liczb rzeczywistych, tego drugiego wśród wymiernych. Jedyna różnica która powoduje, że $\sqrt{2}$ jest nam łatwiej zaakceptować, to fakt iż można go **przybliżyć** liczbami wymiernymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Do swobodnego operowania $\sqrt{2}$ wystarczy nam jedynie wiedza, iż

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

- Oczywiście analogicznie:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

- Okazuje się, że $\sqrt{-1}$ nie jest wcale bardziej tajemniczy niż $\sqrt{2}$. Tego pierwszego nie znajdziemy wśród liczb rzeczywistych, tego drugiego wśród wymiernych. Jedyna różnica która powoduje, że $\sqrt{2}$ jest nam łatwiej zaakceptować, to fakt iż można go **przybliżyć** liczbami wymiernymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wiemy, że $1.4141 < \sqrt{2} < 1.4143$, gdzie jednak szukać $\sqrt{-1}$?
- Może zamiast szukać tej magicznej liczby wzdłuż osi rzeczywistej, poszukać jej w poprzek?
- Faktycznie wygodnie jest przyjąć, że $\sqrt{-1}$ wyznacza nowy, prostopadły kierunek do osi rzeczywistej.
- Zatem rozszerzenie liczb rzeczywistych o $\sqrt{-1}$ przekształca oś rzeczywistą w płaszczyznę zespoloną
- Dla wygody zwykło się oznaczać $i = \sqrt{-1}$. Nazywamy tę liczbę jednością urojoną.
- Liczby postaci $a + bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy zespolonymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wiemy, że $1.4141 < \sqrt{2} < 1.4143$, gdzie jednak szukać $\sqrt{-1}$?
- Może zamiast szukać tej magicznej liczby wzdłuż osi rzeczywistej, poszukać jej w poprzek?
- Faktycznie wygodnie jest przyjąć, że $\sqrt{-1}$ wyznacza nowy, prostopadły kierunek do osi rzeczywistej.
- Zatem rozszerzenie liczb rzeczywistych o $\sqrt{-1}$ przekształca oś rzeczywistą w płaszczyznę zespoloną
- Dla wygody zwykło się oznaczać $i = \sqrt{-1}$. Nazywamy tę liczbę jednością urojoną.
- Liczby postaci $a + bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy zespolonymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wiemy, że $1.4141 < \sqrt{2} < 1.4143$, gdzie jednak szukać $\sqrt{-1}$?
- Może zamiast szukać tej magicznej liczby wzdłuż osi rzeczywistej, poszukać jej w poprzek?
- Faktycznie wygodnie jest przyjąć, że $\sqrt{-1}$ wyznacza nowy, prostopadły kierunek do osi rzeczywistej.
- Zatem rozszerzenie liczb rzeczywistych o $\sqrt{-1}$ przekształca oś rzeczywistą w płaszczyznę zespoloną
- Dla wygody zwykło się oznaczać $i = \sqrt{-1}$. Nazywamy tę liczbę jednością urojoną.
- Liczby postaci $a + bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy zespolonymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wiemy, że $1.4141 < \sqrt{2} < 1.4143$, gdzie jednak szukać $\sqrt{-1}$?
- Może zamiast szukać tej magicznej liczby wzdłuż osi rzeczywistej, poszukać jej w poprzek?
- Faktycznie wygodnie jest przyjąć, że $\sqrt{-1}$ wyznacza nowy, prostopadły kierunek do osi rzeczywistej.
- Zatem rozszerzenie liczb rzeczywistych o $\sqrt{-1}$ przekształca oś rzeczywistą w płaszczyznę zespoloną
- Dla wygody zwykło się oznaczać $i = \sqrt{-1}$. Nazywamy tę liczbę jednością urojoną.
- Liczby postaci $a + bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy zespolonymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wiemy, że $1.4141 < \sqrt{2} < 1.4143$, gdzie jednak szukać $\sqrt{-1}$?
- Może zamiast szukać tej magicznej liczby wzdłuż osi rzeczywistej, poszukać jej w poprzek?
- Faktycznie wygodnie jest przyjąć, że $\sqrt{-1}$ wyznacza nowy, prostopadły kierunek do osi rzeczywistej.
- Zatem rozszerzenie liczb rzeczywistych o $\sqrt{-1}$ przekształca oś rzeczywistą w płaszczyznę zespoloną
- Dla wygody zwykło się oznaczać $i = \sqrt{-1}$. Nazywamy tę liczbę jednością urojoną.
- Liczby postaci $a + bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy zespolonymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

- Wiemy, że $1.4141 < \sqrt{2} < 1.4143$, gdzie jednak szukać $\sqrt{-1}$?
- Może zamiast szukać tej magicznej liczby wzdłuż osi rzeczywistej, poszukać jej w poprzek?
- Faktycznie wygodnie jest przyjąć, że $\sqrt{-1}$ wyznacza nowy, prostopadły kierunek do osi rzeczywistej.
- Zatem rozszerzenie liczb rzeczywistych o $\sqrt{-1}$ przekształca oś rzeczywistą w płaszczyznę zespoloną
- Dla wygody zwykło się oznaczać $i = \sqrt{-1}$. Nazywamy tę liczbę jednością urojoną.
- Liczby postaci $a + bi$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy zespolonymi.



Liczby zespolone - szybki kurs

Zobaczmy w jaki sposób wykonywać operacje na liczbach zespolonych.

Dodawanie:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mnożenie:

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bic + bdi^2 = \\ &= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Spróbujmy zatem obliczyć ile dla poszczególnych $n \in \mathbb{N}$ wynosi

$$\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$



Liczby zespolone - szybki kurs

Zobaczmy w jaki sposób wykonywać operacje na liczbach zespolonych.

Dodawanie:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mnożenie:

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bic + bdi^2 = \\ &= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Spróbujmy zatem obliczyć ile dla poszczególnych $n \in \mathbb{N}$ wynosi

$$\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$



Liczby zespolone - szybki kurs

Zobaczmy w jaki sposób wykonywać operacje na liczbach zespolonych.

Dodawanie:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mnożenie:

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bic + bdi^2 = \\ &= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Spróbujmy zatem obliczyć ile dla poszczególnych $n \in \mathbb{N}$ wynosi

$$\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$



Liczby zespolone - szybki kurs

Zobaczmy w jaki sposób wykonywać operacje na liczbach zespolonych.

Dodawanie:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mnożenie:

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bic + bd\textcolor{red}{i}^2 = \\ &= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Spróbujmy zatem obliczyć ile dla poszczególnych $n \in \mathbb{N}$ wynosi

$$\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$



Liczby zespolone - szybki kurs

Zobaczmy w jaki sposób wykonywać operacje na liczbach zespolonych.

Dodawanie:

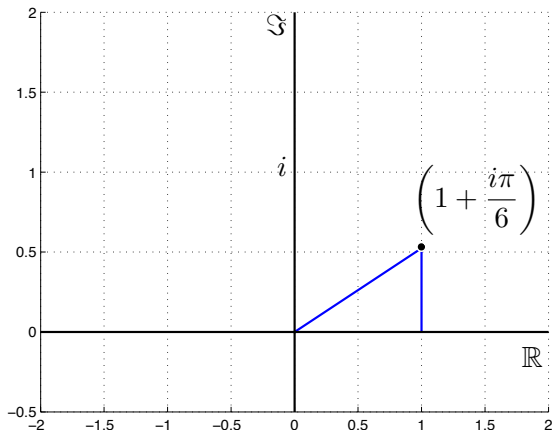
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

mnożenie:

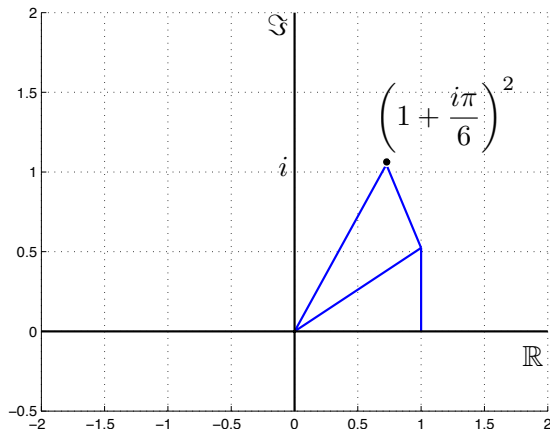
$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bic + bdi^2 = \\ &= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

Spróbujmy zatem obliczyć ile dla poszczególnych $n \in \mathbb{N}$ wynosi

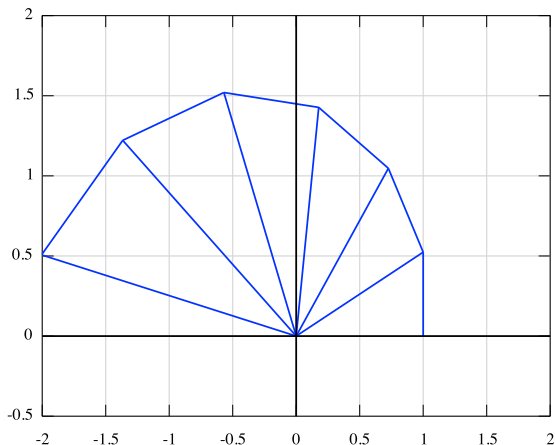
$$\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$



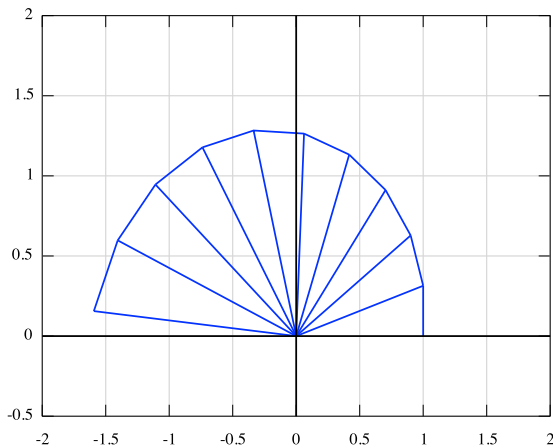
Rysunek: Potęgowanie liczby $(1 + \frac{i\pi}{6})$ (interpretacja geometryczna)



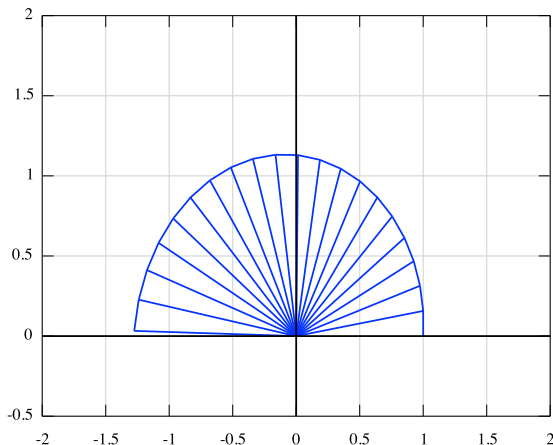
Rysunek: Potęgowanie liczby $(1 + \frac{i\pi}{6})$ (interpretacja geometryczna)



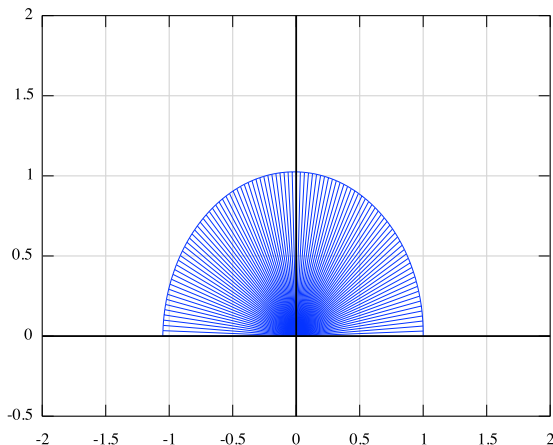
Rysunek: Kolejne przybliżenia wartości $e^{i\pi} \approx \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$ dla $n = 6, 10, 20, 100, 200$



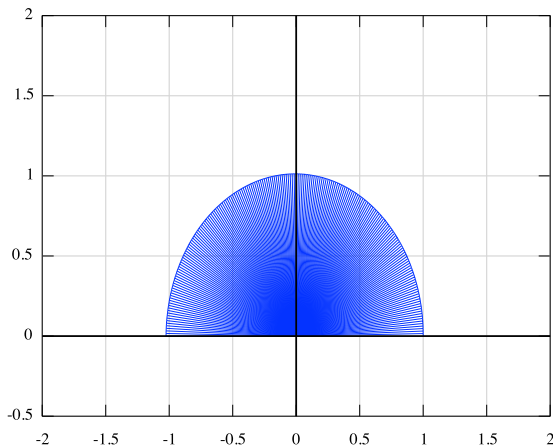
Rysunek: Kolejne przybliżenia wartości $e^{i\pi} \approx \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$ dla $n = 6, 10, 20, 100, 200$



Rysunek: Kolejne przybliżenia wartości $e^{i\pi} \approx \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$ dla $n = 6, 10, 20, 100, 200$



Rysunek: Kolejne przybliżenia wartości $e^{i\pi} \approx \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$ dla $n = 6, 10, 20, 100, 200$



Rysunek: Kolejne przybliżenia wartości $e^{i\pi} \approx \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$ dla $n = 6, 10, 20, 100, 200$



Wzór Eulera

Zatem pokazaliśmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n = e^{i\pi} = -1$$

albo inaczej:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Wzór łączący ze sobą wszystkie cztery podstawowe stałe matematyczne $(1, 0, e, \pi)$ w eleganckim i głębokim związku! Wzór ten, zwany wzorem Eulera uważany jest za jeden z najbardziej eleganckich i głębokich wyników w matematyce.



Powróćmy zatem do pytania, ile może wypłacić bank kapitalizujący ciągle odsetki z 1000zł? Przy założeniu, że stopa roczna wynosi 10% mamy

$$1000\text{zł} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0.1}{n}\right)^n = 1000\text{zł} \cdot e^{0.1} = 1000\text{zł} \cdot 1.105170918075648$$

Zatem mamy szansę na 1105,17zł. Zatem zyskamy zaledwie 1gr w stosunku do kapitalizacji dziennej i 46gr w stosunku do kapitalizacji miesięcznej...



Podsumowanie

- Liczba e pojawia się przy prostym przejściu granicznym, związanym np. z zagadnieniem ciągłej kapitalizacji odsetek
- Na pierwszy rzut oka może nie ma w tej liczbie nic szczególnego, ale przy głębszej analizie okazuje się to prawie najważniejsza liczba w matematyce!
- Łatwo pokazać, iż jest to liczba niewymierna...
- Korzystając z definicji e i prostych własności liczb zespolonych można udowodnić najładniejszy wzór matematyki!
- Jednak to tylko wierzchołek góry lodowej. Liczba e pojawia się w miejscach gdzie nikt by się jej nie spodziewał i przeplata eleganckimi zależnościami przez całą matematykę.



Podsumowanie

- Liczba e pojawia się przy prostym przejściu granicznym, związanym np. z zagadnieniem ciągłej kapitalizacji odsetek
- Na pierwszy rzut oka może nie ma w tej liczbie nic szczególnego, ale przy głębszej analizie okazuje się to prawie najważniejsza liczba w matematyce!
- Łatwo pokazać, iż jest to liczba niewymierna...
- Korzystając z definicji e i prostych własności liczb zespolonych można udowodnić najładniejszy wzór matematyki!
- Jednak to tylko wierzchołek góry lodowej. Liczba e pojawia się w miejscach gdzie nikt by się jej nie spodziewał i przeplata eleganckimi zależnościami przez całą matematykę.



Podsumowanie

- Liczba e pojawia się przy prostym przejściu granicznym, związanym np. z zagadnieniem ciągłej kapitalizacji odsetek
- Na pierwszy rzut oka może nie ma w tej liczbie nic szczególnego, ale przy głębszej analizie okazuje się to prawie najważniejsza liczba w matematyce!
- Łatwo pokazać, iż jest to liczba niewymierna...
- Korzystając z definicji e i prostych własności liczb zespolonych można udowodnić najładniejszy wzór matematyki!
- Jednak to tylko wierzchołek góry lodowej. Liczba e pojawia się w miejscach gdzie nikt by się jej nie spodziewał i przeplata eleganckimi zależnościami przez całą matematykę.



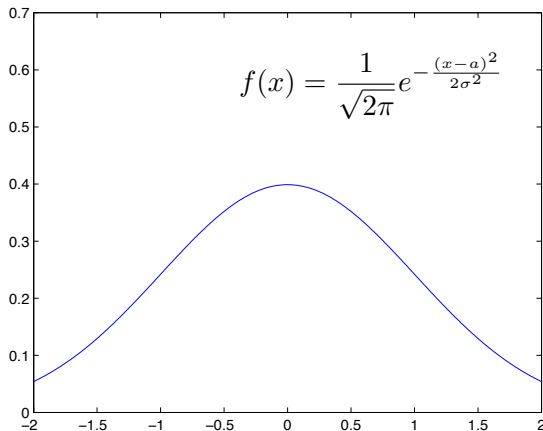
Podsumowanie

- Liczba e pojawia się przy prostym przejściu granicznym, związanym np. z zagadnieniem ciągłej kapitalizacji odsetek
- Na pierwszy rzut oka może nie ma w tej liczbie nic szczególnego, ale przy głębszej analizie okazuje się to prawie najważniejsza liczba w matematyce!
- Łatwo pokazać, iż jest to liczba niewymierna...
- Korzystając z definicji e i prostych własności liczb zespolonych można udowodnić najładniejszy wzór matematyki!
- Jednak to tylko wierzchołek góry lodowej. Liczba e pojawia się w miejscach gdzie nikt by się jej nie spodziewał i przeplata eleganckimi zależnościami przez całą matematykę.



Podsumowanie

- Liczba e pojawia się przy prostym przejściu granicznym, związanym np. z zagadnieniem ciągłej kapitalizacji odsetek
- Na pierwszy rzut oka może nie ma w tej liczbie nic szczególnego, ale przy głębszej analizie okazuje się to prawie najważniejsza liczba w matematyce!
- Łatwo pokazać, iż jest to liczba niewymierna...
- Korzystając z definicji e i prostych własności liczb zespolonych można udowodnić najładniejszy wzór matematyki!
- Jednak to tylko wierzchołek góry lodowej. Liczba e pojawia się w miejscach gdzie nikt by się jej nie spodziewał i przeplata eleganckimi zależnościami przez całą matematykę.



Rysunek: Krzywa Gaussa także zdefiniowana jest z wykorzystaniem liczby e...



Zadania

- 1 Zapisz w postaci a^b : $\frac{64}{\sqrt{2}}, 16\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$
- 2 Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x$
- 3 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ istnieje liczba rzeczywista c taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a^x = e^{cx}$.
- 4 Wykorzystaj konstrukcję geometryczną z prezentacji aby pokazać, że $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ (gdzie $i^2 = -1$)
- 5 Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie x_n , że dla $x > x_n$ zachodzi $e^x > x^n$
- 6 (*) Udowodnij, że pochodna funkcji e^x jest równa jej samej (dla znających definicję pochodnej).



Zadania

- 1 Zapisz w postaci a^b : $\frac{64}{\sqrt{2}}$, $16\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$
- 2 Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x$
- 3 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ istnieje liczba rzeczywista c taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a^x = e^{cx}$.
- 4 Wykorzystaj konstrukcję geometryczną z prezentacji aby pokazać, że $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ (gdzie $i^2 = -1$)
- 5 Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie x_n , że dla $x > x_n$ zachodzi $e^x > x^n$
- 6 (*) Udowodnij, że pochodna funkcji e^x jest równa jej samej (dla znających definicję pochodnej).



Zadania

- 1 Zapisz w postaci a^b : $\frac{64}{\sqrt{2}}$, $16\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$
- 2 Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x$
- 3 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ istnieje liczba rzeczywista c taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a^x = e^{cx}$.
- 4 Wykorzystaj konstrukcję geometryczną z prezentacji aby pokazać, że $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ (gdzie $i^2 = -1$)
- 5 Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie x_n , że dla $x > x_n$ zachodzi $e^x > x^n$
- 6 (*) Udowodnij, że pochodna funkcji e^x jest równa jej samej (dla znających definicję pochodnej).



Zadania

- 1 Zapisz w postaci a^b : $\frac{64}{\sqrt{2}}$, $16\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$
- 2 Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x$
- 3 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ istnieje liczba rzeczywista c taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a^x = e^{cx}$.
- 4 Wykorzystaj konstrukcję geometryczną z prezentacji aby pokazać, że $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ (gdzie $i^2 = -1$)
- 5 Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie x_n , że dla $x > x_n$ zachodzi $e^x > x^n$
- 6 (*) Udowodnij, że pochodna funkcji e^x jest równa jej samej (dla znających definicję pochodnej).



Zadania

- 1 Zapisz w postaci a^b : $\frac{64}{\sqrt{2}}$, $16\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$
- 2 Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x$
- 3 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ istnieje liczba rzeczywista c taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a^x = e^{cx}$.
- 4 Wykorzystaj konstrukcję geometryczną z prezentacji aby pokazać, że $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ (gdzie $i^2 = -1$)
- 5 Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie x_n , że dla $x > x_n$ zachodzi $e^x > x^n$
- 6 (*) Udowodnij, że pochodna funkcji e^x jest równa jej samej (dla znających definicję pochodnej).



Zadania

- 1 Zapisz w postaci a^b : $\frac{64}{\sqrt{2}}, 16\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}$
- 2 Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^x \geq 1 + x$
- 3 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a > 0$ istnieje liczba rzeczywista c taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $a^x = e^{cx}$.
- 4 Wykorzystaj konstrukcję geometryczną z prezentacji aby pokazać, że $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ (gdzie $i^2 = -1$)
- 5 Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie x_n , że dla $x > x_n$ zachodzi $e^x > x^n$
- 6 (*) Udowodnij, że pochodna funkcji e^x jest równa jej samej (dla znających definicję pochodnej).



Prezentację można pobrać z:

http://www.mat.umk.pl/~philip/kolko_mat2009.pdf

Będzie również dostępna na stronie kółka.