



Co komputery robią z falami czyli DSP

Filip Piękniewski

Wydział Matematyki i Informatyki
UMK

Prezentacja dostępna na
<http://www.mat.uni.torun.pl/~philip/>

25 października 2008



- 1 Wstęp
 - Czym jest fala?
 - Fala akustyczna
 - Fale poprzeczne
 - Właściwości fal
- 2 Fale w komputerze
 - Próbkowanie
 - Kompresja
- 3 Obraz jako fala
 - Obraz czy krajobraz?
 - Co można zrobić?
 - Transformata Radona i tomografia
 - Aliasing
- 4 Obraz kolorowy
 - Kolory i percepcja
 - Reprezentacje kolorów
 - Zastosowania



Przetwarzanie cyfrowe sygnałów (ang. **Digital Signal Processing** - **DSP**) to ważny kawałek szeroko pojętej informatyki. Specyfika tej dziedziny wymaga pewnego przygotowania fizycznego i jest czasem trudno zrozumiała dla "typowych programistów". W dalszej części prezentacji zawartych jest sporo przykładów z życia wziętych, także w przypadku obrazów (sygnałów dwuwymiarowych). Na koniec jest trochę na temat reprezentacji kolorów.



Czym jest fala?



Rysunek: Fale morskie u wybrzeży Hawajów

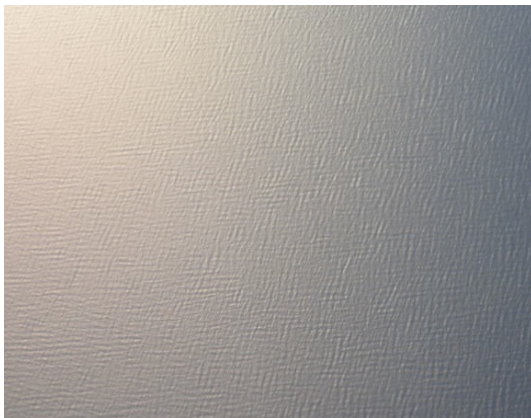
Czym jest fala?



Rysunek: Fale morskie widziane od "drugiej" strony...



Czym jest fala?



Rysunek: I jeszcze raz fale morskie. Tym razem widziane z wysoka...



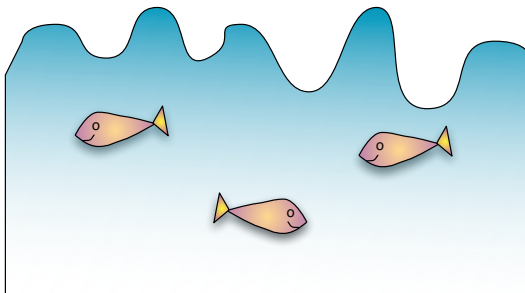
Czym jest fala?

Zauważmy parę faktów:

- Przesuwanie się fali morskiej po powierzchni morza jest niezauważalne dla nurków znajdujących się odrobinę głębiej.
- Fale morskie potrafią na raz rozchodzić się w wielu kierunkach, czasem prostopadle do siebie.
- Z wyjątkiem brzegu fale się nie "zderzają" a raczej przenikają przez siebie jakby niezauważone...

Zatem czym jest fala morska? Co właściwie się przesuwa i jak?

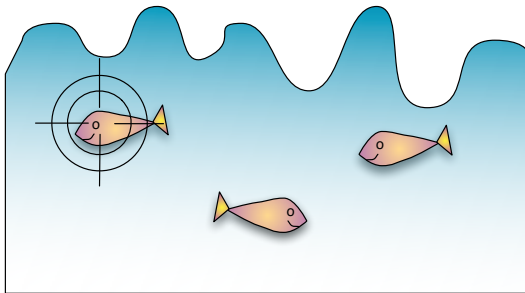
Jak się porusza ryba?



Rysunek: W jaki sposób porusza się swobodna ryba tuż pod powierzchnią?



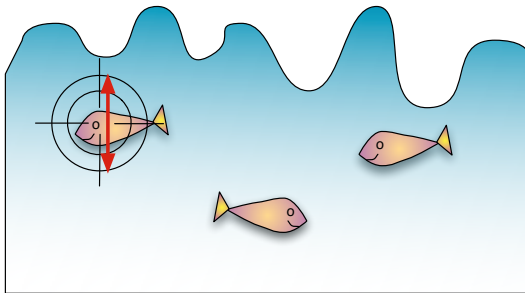
Jak się porusza ryba?



Rysunek: W jaki sposób porusza się swobodna ryba tuż pod powierzchnią?



Jak się porusza ryba?



Rysunek: W jaki sposób porusza się swobodna ryba tuż pod powierzchnią?



Jak się porusza ryba?

Ryba swobodnie "podskakuje" w czasie gdy przechodzi nad nią fala. Podobny efekt możemy zaobserwować swobodnie pływając na lekko pofalowanym morzu. Fala nas nie pcha¹ w bok a jedynie winduje w górę i w dół!

Ale nie tylko ryba czy my to odczuwamy: w rzeczywistości sama woda porusza się **pionowo** mimo że fala płynie **poziomo**!

Reasumując: ruch fali to coś zupełnie innego niż ruch wody!

¹Czasem jeśli fala jest mała to trochę wygina...

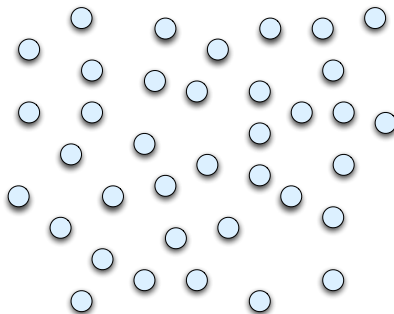


Fale dźwiękowe

- Jednymi z najczęściej nas otaczających fal są fale dźwiękowe.
- Powstają one w ośrodku materialnym (ciele stałym, płynie czy gazie). My najczęściej doświadczamy fal dźwiękowych rozchodzących się w powietrzu które nas otacza.

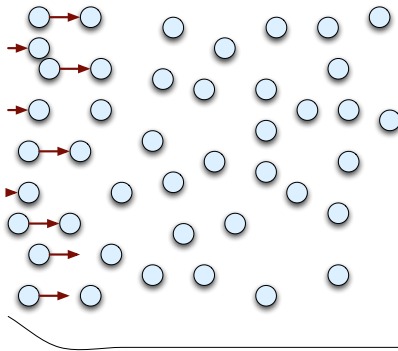


Fala akustyczna?



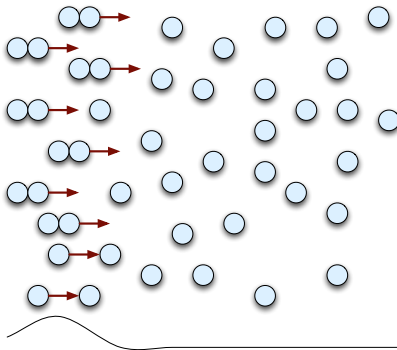
Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).

Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).

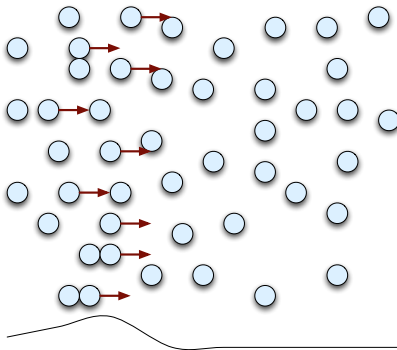
Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).



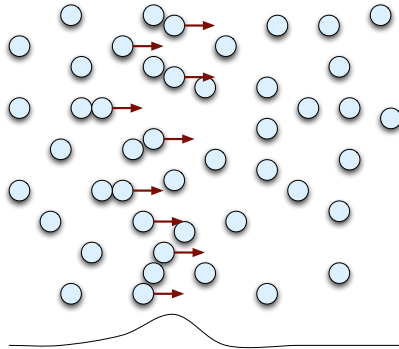
Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).



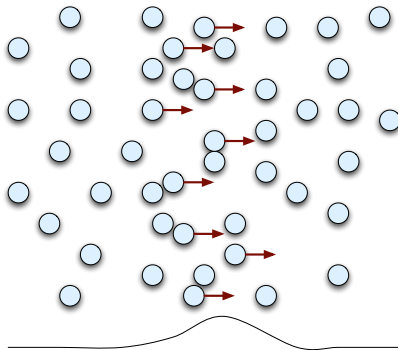
Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).

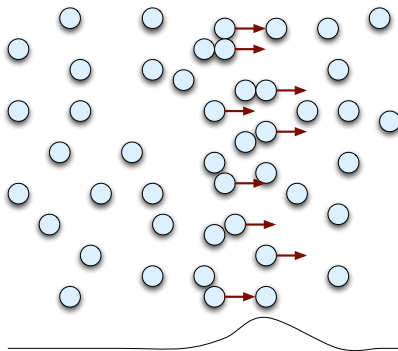


Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).

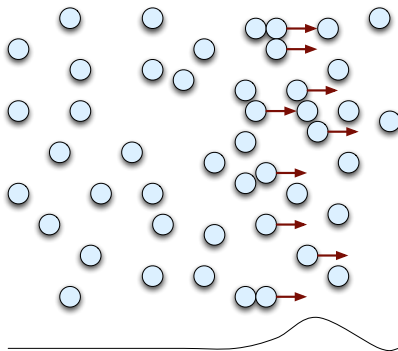
Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).

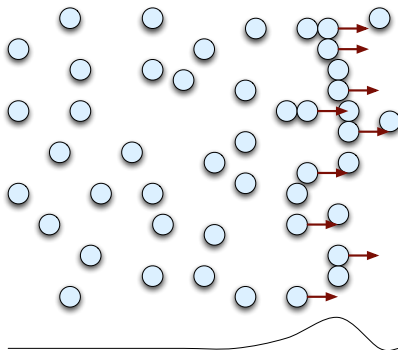


Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).

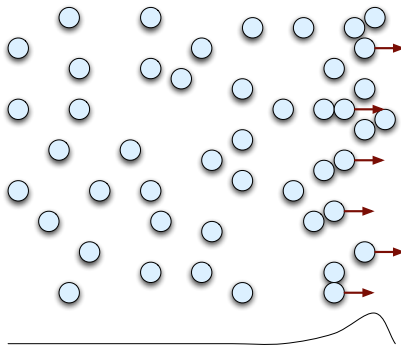
Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).



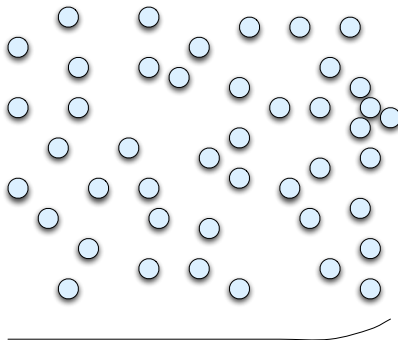
Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).



Fala akustyczna?



Rysunek: Przemieszczenie fali akustycznej w ośrodku (np. powietrzu).



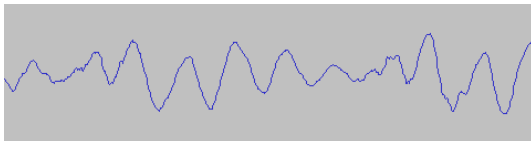
Fale dźwiękowe

- Podobnie jak w przypadku fali morskiej przejście fali akustycznej przez ośrodek powoduje jedynie niewielkie przemieszczenia cząsteczek powietrza. Zasadniczo cząsteczki pozostają blisko swojego położenia początkowego, fala może jednak podróżować na wielkie odległości.
- W odróżnieniu od fal morskich cząsteczki powietrza przemieszczają się w kierunku zgodnym z kierunkiem rozchodzenia się fali - jest to tak zwana fala podłużna.



Fale dźwiękowe

- Parametrem który się zmienia w czasie przechodzenia fali dźwiękowej jest ciśnienie ośrodka.
- Możemy mierzyć wartość ciśnienie i wykreślać przebieg jego zmian w zależności od czasu:



Rysunek: Zapis fali dźwiękowej w dziedzinie czasu



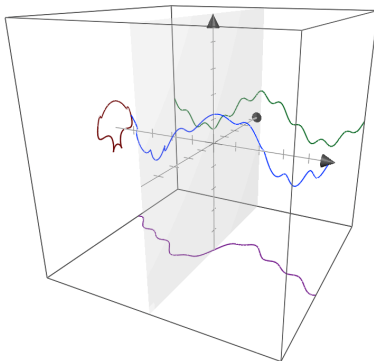
Fale dźwiękowe

- Wykres z poprzedniego slajdu przypomina nieco wykresy funkcji spotykane w szkole...
- W tym przypadku przebieg funkcji jest dość skomplikowany ale...
- ...nadal jest to zwykła funkcja działająca ze zbioru liczb rzeczywistych do tego zbioru!
- Zatem sygnał dźwiękowy (falę podłużną) możemy **modelować** jako funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Fale dźwiękowe

- Ale pamiętamy, że są jeszcze inne fale niż podłużne!
- Przejście fali morskiej powoduje przemieszczenie ośrodka w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali...
- Ponieważ żyjemy w przestrzeni trójwymiarowej, to zbiorem wektorów prostopadłych do danego jest płaszczyzna
- Zatem przemieszczenie ośrodka w przypadku **fali poprzecznej** może wystąpić w dowolnym kierunku na płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali.
- Aby móc modelować taki sygnał potrzebujemy czegoś więcej niż zbioru liczb rzeczywistych.



Rysunek: Dla fali poprzecznej przemieszczenie ośrodka w każdej chwili jest wektorem dwuwymiarowym. Zatem falę taką możemy modelować jako funkcję działającą ze zbioru liczb rzeczywistych do zbioru punktów na płaszczyźnie. Rysunek przedstawia przykład wykresu takiej funkcji.



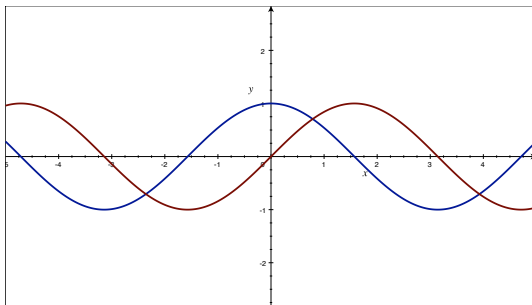
- Z pewnych przyczyn wygodniej niż myśleć o przesunięciach ośrodka w terminach punktów na płaszczyźnie jest patrzeć na nie jak na liczby zespolone.
- Liczby zespolone zasadniczo są wektorami na płaszczyźnie, jednak mają dodatkowe działanie (mnożenie) które nadaje im elegancką strukturę algebraiczną.
- W takim wypadku możemy modelować falę poprzeczną jako funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.



- Czy podział na fale poprzeczne i podłużne nie jest przypadkiem sztuczny?
- Ostatecznie nie ma powodu dla którego fale obydwu rodzajów mogły się jednocześnie rochoodzić w jednym ośrodku?
- Jednak lepiej jest je traktować osobno: fale jednego i drugiego rodzaju potrafią rozchoodzić się w jednym ośrodku z różnymi prędkościami (fale poprzeczne rozchodzą się wolniej)!
- Fale rozmaitych typów (a nawet tego samego typu) mogą rozchodzić się w różnych kierunkach i przenikać przez siebie.
- Matematycznie ten podział też ma swoje głębokie uzasadnienia. Mówi się o **sygnale rzeczywistym** i **sygnale zespolonym**.

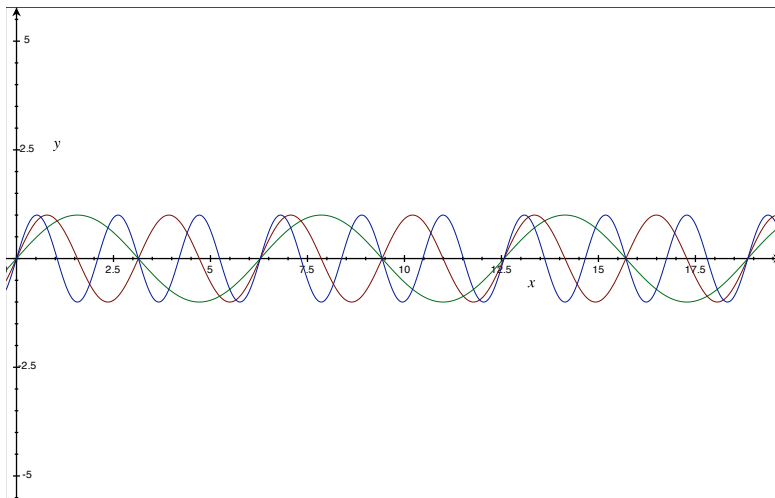


- Jedną z najbardziej fundamentalnych cech fal jest zasada superpozycji.
- Jeżeli wpuścimy do ośrodka naraz dwie fale (dodamy je do siebie), to po rozpropagowaniu powstała fala będzie się stale zachowywała jak suma dwóch fal początkowych.
- Można to rozumieć tak: fala składająca się z kilku fal składowych niezależnie od propagacji zawsze **pamięta** z jakich fal się składała na początku swojej ewolucji...
- Nasuwa to pewną zachciankę: może fale daje się zawsze rozłożyć na **proste fale składowe**? Jeśli tak, to jak takie proste fale mogą wyglądać?

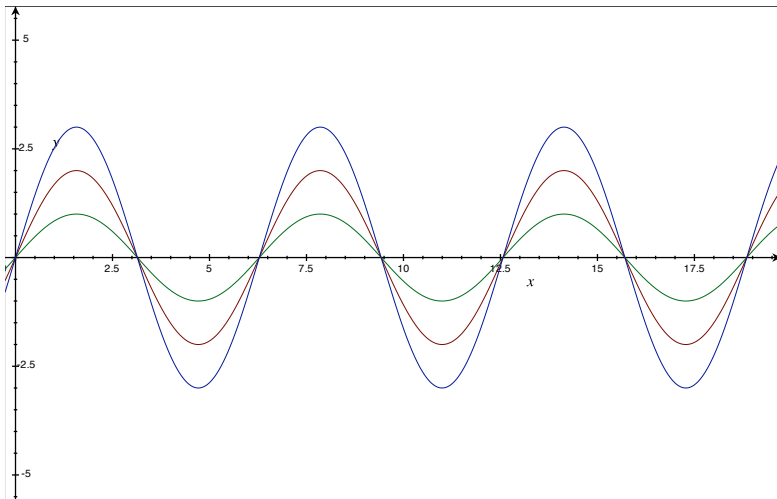


Rysunek: Najprostsze fale to sinusoida i cosinusoida...

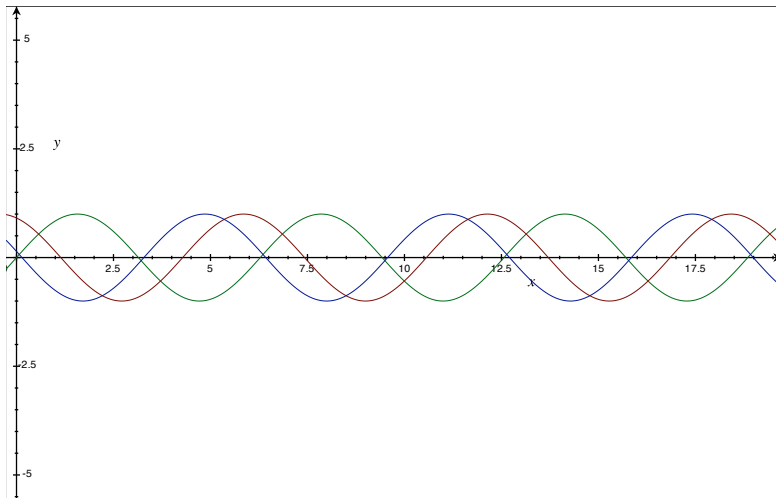
Okazuje się, że każdą falę podłużną (rzeczywistą) da się przedstawić jako sumę fal sinusoidalnych odpowiednio przesuwanych i skalowanych.



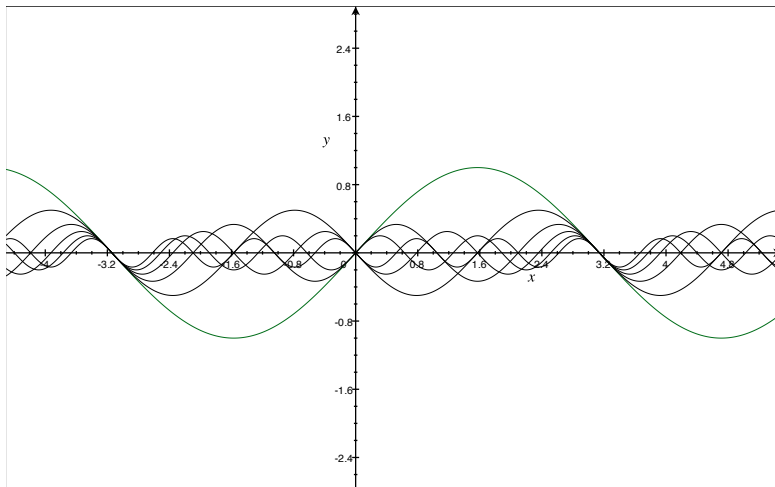
Rysunek: Fale różnych częstotliwościach.



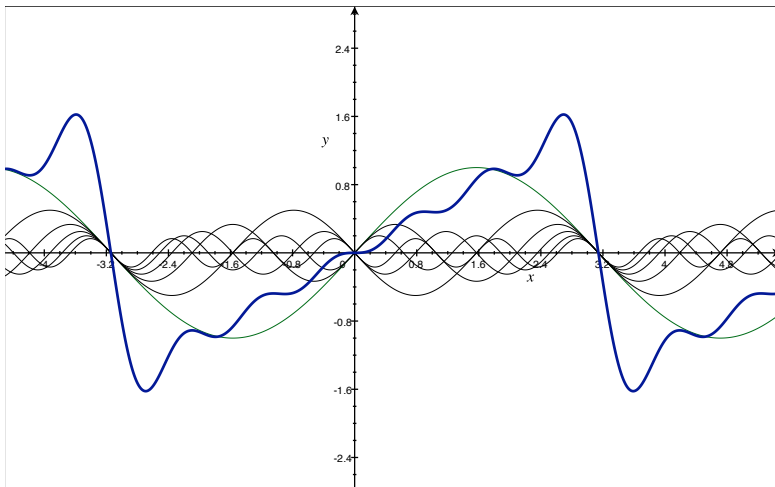
Rysunek: Fale różnych amplitudach.



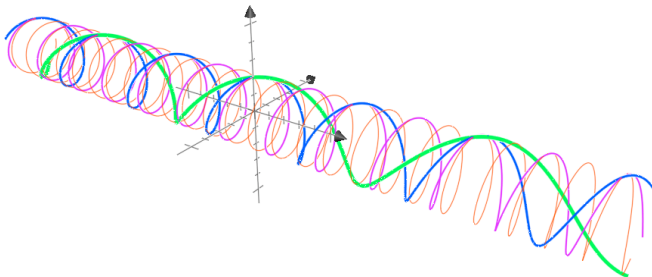
Rysunek: Fale różnych fazach.



Rysunek: Kilka fal o różnych amplitudach i częstotliwościach.



Rysunek: Superpozycja (suma) tych fal, może mieć przebieg zupełnie odmienny od sinusa.

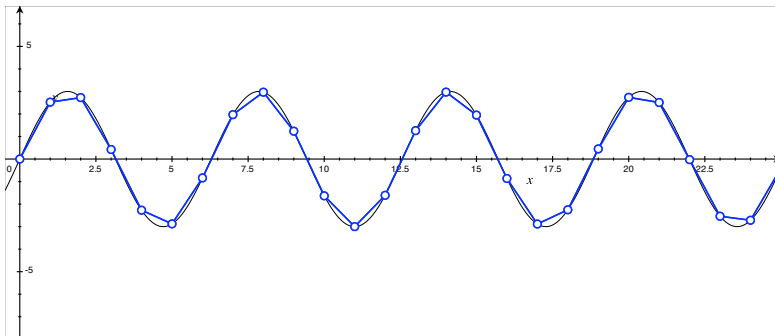


Rysunek: Fale poprzeczne natomiast można skomponować zawsze jako sumę sprężynowatych fal jak wyżej, które zasadniczo... też są sinusoidalne ale w nieco innym sensie...

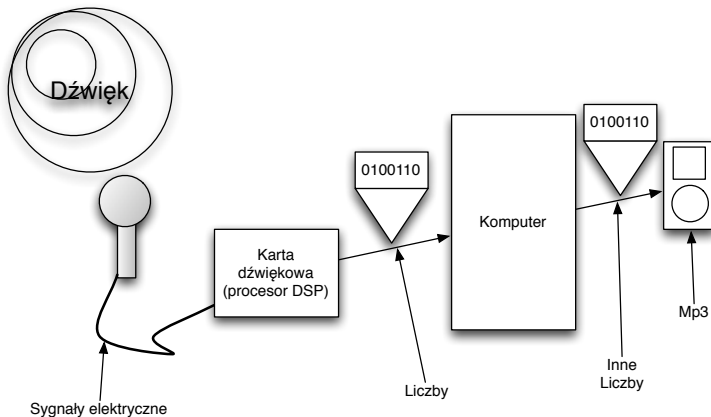


Próbkowanie

- Fale o których rozmawialiśmy dotychczas to były fizyczne, które modelujemy za pomocą funkcji matematycznych.
- Komputery natomiast przetwarzają jedynie skończone ciągi liczb (funkcja rzeczywista nie jest skończona, bo liczb rzeczywistych jest nieskończenie wiele!)
- Zatem aby przetwarzać sygnały w komputerze, trzeba je jeszcze bardziej uprościć, do postaci ciągów liczb. Proces ten nazywamy próbkowaniem.



Rysunek: Komputer zawsze operuje na konkretnych ciągach liczb, nie potrafi operować funkcjami ciągłymi. Dlatego **sygnał analogowy** musi zostać **spróbkowany** w równych odstępach czasu. Powstała, kawałkami liniowa **aproksymacja** jest cyfrową reprezentacją sygnału. Od tej pory jest to tablica liczb którą możemy modyfikować za pomocą programu.



Rysunek: Schemat digitalizacji dźwięku.



Kompresja

- Poszczególne wartości ciśnienia (napięcia elektrycznego) są zapisywane w równych odstępach czasu (częstotliwość próbkowania np. 44100Hz)
- Wartości zarejestrowanych zmian ośrodka pochodzą ze skończonego zbioru (rozdzielczość próbkowania np. 16 bit)
- W przypadku nagrań stereofonicznych mamy dwa niezależne kanały dźwięku.
- Po przeliczeniu $44100 \cdot 16 \text{bit} \cdot 2$ wychodzi, że 1m takiego nagrania zajmuje 10.09 MB.
- Zatem przeciętny utwór to około 50MB. Dlatego płyta CD mieści tylko około 74 minuty...
- Chyba że...



Kompresja

- Chyba, że przypomnimy sobie iż dźwięk to fala...
- A fale może rozłożyć na proste fale składowe...
- Pewne częstotliwości są słyszalne lepiej, pewne gorzej. Niektóre można usunąć bez większych strat jakości dla słuchacza...
- W ten sposób powstał format MP3.

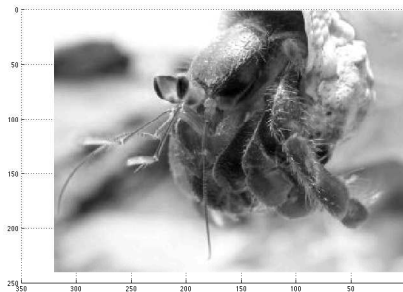


Obraz jako fala

- Obraz dwuwymiarowy możemy traktować podobnie jak pofalowaną powierzchnię morza
- Skoro tak, to mamy do czynienia ze skomplikowaną superpozycją (sumą) fal elementarnych
- Co się stanie gdy zaczniemy modyfikować fale składowe obrazu?



Obraz czy krajobraz?



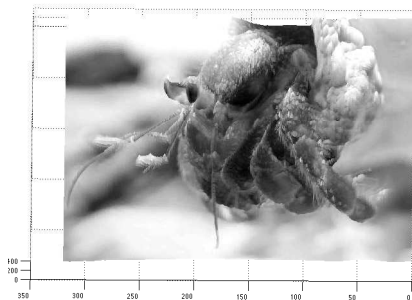


Spis treści
Wstęp
Fale w komputerze
Obraz jako fala
Obraz kolorowy

Obraz czy krajobraz?
Co można zrobić?
Transformata Radona i tomografia
Aliasing



Obraz czy krajobraz?



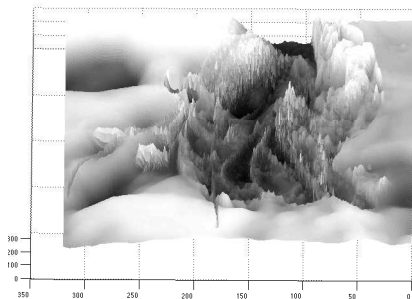


Spis treści
Wstęp
Fale w komputerze
Obraz jako fala
Obraz kolorowy

Obraz czy krajobraz?
Co można zrobić?
Transformata Radona i tomografia
Aliasing



Obraz czy krajobraz?





Spis treści
Wstęp
Fale w komputerze
Obraz jako fala
Obraz kolorowy

Obraz czy krajobraz?

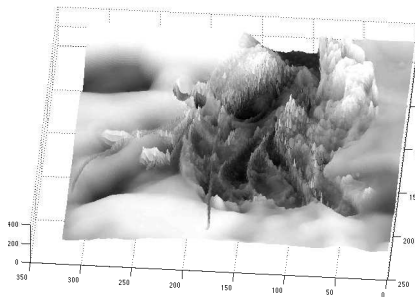
Co można zrobić?

Transformata Radona i tomografia

Aliasing



Obraz czy krajobraz?



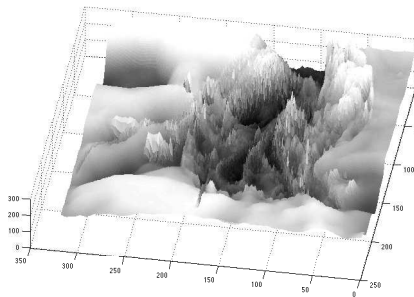


Spis treści
Wstęp
Fale w komputerze
Obraz jako fala
Obraz kolorowy

Obraz czy krajobraz?
Co można zrobić?
Transformata Radona i tomografia
Aliasing



Obraz czy krajobraz?



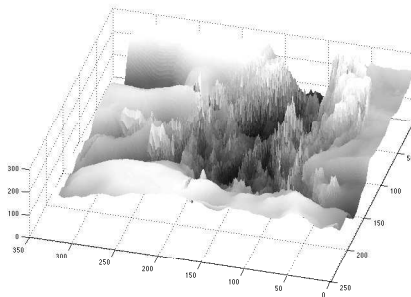


Spis treści
Wstęp
Fale w komputerze
Obraz jako fala
Obraz kolorowy

Obraz czy krajobraz?
Co można zrobić?
Transformata Radona i tomografia
Aliasing

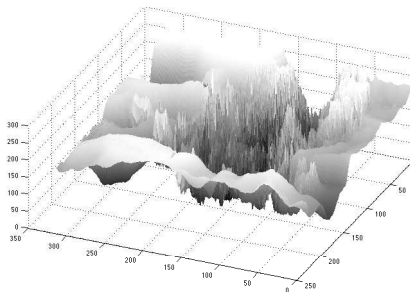


Obraz czy krajobraz?



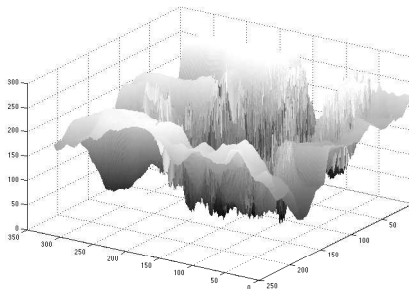


Obraz czy krajobraz?





Obraz czy krajobraz?



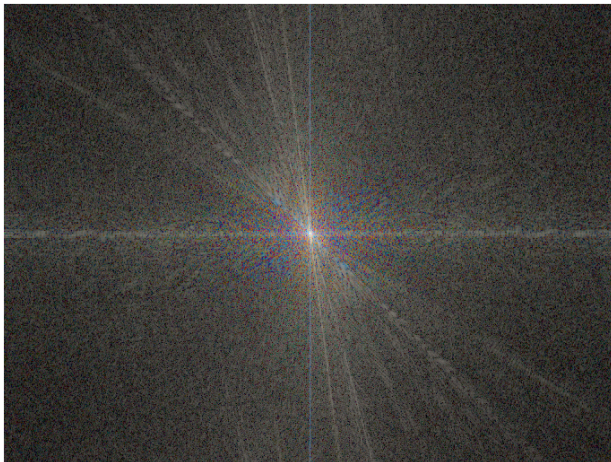


Spis treści
Wstęp
Fale w komputerze
Obraz jako fala
Obraz kolorowy

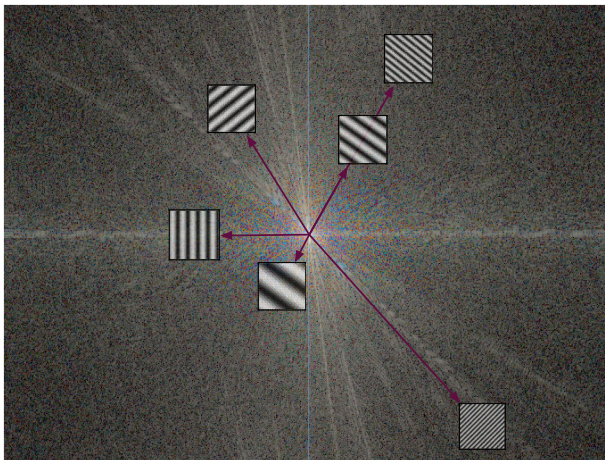
Obraz czy krajobraz?
Co można zrobić?
Transformata Radona i tomografia
Aliasing



Rysunek: Obraz w dziedzinie przestrzennej.



Rysunek: Ten sam obraz w dziedzinie częstotliwości (tutaj tzw. widmo mocy).



Rysunek: Punkty w dziedzinie częstotliwości odpowiadają falom o określonej częstotliwości i kierunku.



Rysunek: Informacje zawarte w niskich (lewo) częstotliwościach różnią się dalece od tych zawartych w wysokich (prawo). Wszelkie jednolite pola są reprezentowane w niskich częstotliwościach, szczegóły i krawędzie (bez wartości płaskich) znajdują reprezentacje w wysokich częstotliwościach.



Obraz jako fala

- Czy taka interpretacja obrazu (jako sumy fal zamiast zbioru pikseli) ma istotne zalety?
- Czy możemy w takiej reprezentacji robić z obrazem coś czego nie udałooby się inaczej?
- Czy mówiłbym o tym gdyby tak nie było?



Rysunek: Fragment starego zdjęcia. Po lewej widać periodyczną fakturę papieru, która skutecznie utrudnia dalszą obróbkę zdjęcia. Po prawej to samo zdjęcie z usuniętą fakturą. Tu przyszła z pomocą interpretacja obrazu jako fali...



Rysunek: Obraz rozmazany. Tutaj chyba już nic się nie da naprawić?

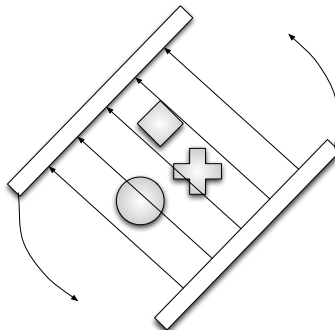


Rysunek: Obraz odzyskany z rozmazanego w wyniku pewnych operacji w dziedzinie częstotliwości.

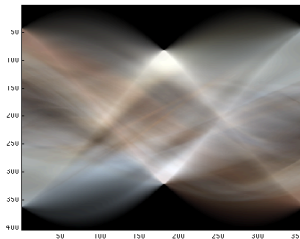
Transformata Radona

Istnieje jeszcze jedna ważna transformata dwuwymiarowego obrazu:

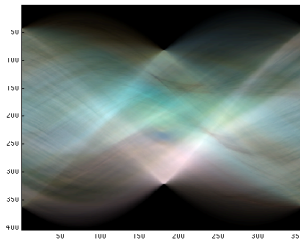
- Polega ona na "prześwietleniu" obrazu wzdłuż wszystkich kierunków
- W wyniku tej transformacji powstaje tak zwany "sinogram"
- Takie sinogramy produkuje np. tomograf



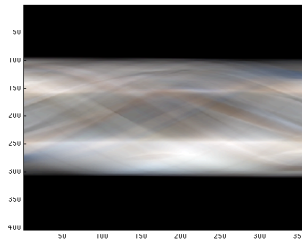
Rysunek: Schemat obrazowania tomograficznego.



Rysunek: Obraz oryginalny i jego sinogram (w RGB).



Rysunek: Obraz oryginalny i jego sinogram (w RGB).



Rysunek: Obraz oryginalny i jego sinogram (w RGB).



Czy transformata Radona jest odwracalna?

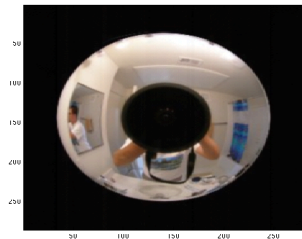
- Patrząc na pozwijany makaron sinogramu można odnieść wrażenie, iż tracimy sporo informacji
- Intuicja podpowiada na przykład, iż w ogólności nie da się odtworzyć funkcji na podstawie jej rzutów na osie
- Nawet mając wszystkie rzuty (kontury) nie da się odtworzyć funkcji która ma minimum lokalne!
- Tutaj jednak mamy nie rzuty a całki (prześwietlenia) i na wszystkie możliwe kierunki
- Wszystko to powoduje, że transformata Radona jest odwracalna! Interpretacja obrazu jako fali jest tutaj z pewnych przyczyn bardzo ważna!



Filtrowana projekcja zwrotna

- Sinogram można przetworzyć na obraz oryginalny za pomocą tzw. Transformaty Fouriera która bezpośrednio korzysta z interpretacji obrazu jako fali.
- Algorytm ten jednak jest niedoskonały i niestabilny numerycznie.
- Inną metodą jest tzw. **Filtrowana projekcja zwrotna**. Działa lepiej ale w swoich podstawach również korzysta z własności fali (ma związek z techniką likwidowania rozmycia pokazaną kilka slajdów wcześniej).

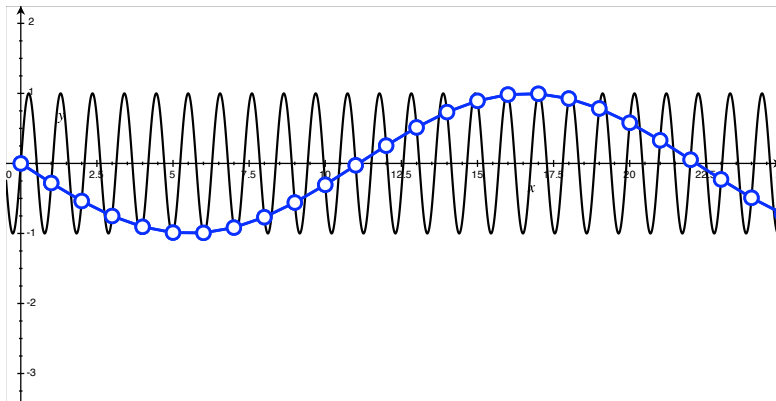
Algorytm ten jest prosty, stabilny i powoduje, że tomografy komputerowe działają w szpitalach od wielu lat. Ładne demo można zobaczyć tutaj: http://www.physics.ubc.ca/~mirg/home/tutorial/fbp_recon.html



Rysunek: Rekonstrukcje na podstawie sinogramów (filtrowana projekcja zwrotna).



Aliasing



Rysunek: Aliasing. Sygnał próbkowany ze zbyt małą częstotliwością produkuje artefakt w postaci fali o niskiej częstotliwości, której w rzeczywistości w sygnale nie ma.



- Aliasing wynika z **interferencji** pomiędzy częstotliwościami w sygnale a częstotliwością próbkowania.
- Jest to własność fal, aby przeciwdziałać temu zjawisku trzeba się znać na falach!
- Są pewne sposoby przeciwdziałania temu zjawisku - gdyby nie istniały nagrania cyfrowe pełne byłyby dziwnych szumów i trzasków.



Aliasing w 2d

- Podobnie jak w przypadku sygnałów jednowymiarowych, tak i w 2d może pojawić się problem aliasingu.
- W 2d efekt ten może przyjmować ciekawą formę rozmaitych dziwnych fal przebiegających przez obraz - efekt ten nosi nazwę efektu Moire
- Problem ten rozwiązujemy tymi samymi metodami co w przypadku sygnału jednowymiarowego...



Rysunek: Obraz spróbkowany zbyt zgrubnie (ang. subsampled). Widać wyraźny efekt Moire.

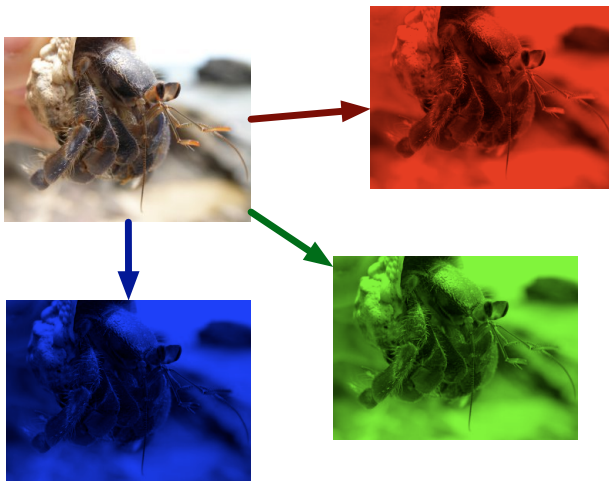


Rysunek: Ten sam obraz potraktowany filtrem dolnoprzepustowym przed próbkowaniem.

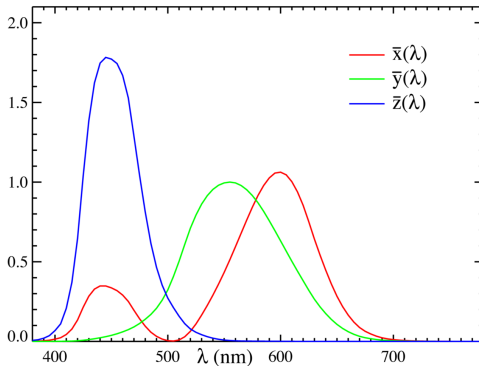


Kolory

- Jak wiadomo, ludzki aparat percepcji wzrokowej posiada receptory, których maksimum czułości przypada w trzech różnych częstotliwościach
- Są to długości fal: $\sim 445nm$, $\sim 545nm$ i $\sim 570nm$ którym odpowiadają odpowiednio wrażenia kolorystyczne niebieskiego, zielonego i czerwonego.
- Z tego względu obrazy przeznaczone do oglądania przez ludzi są próbkowane niezależnie w trzech pasmach, z tego względu każdy pixel składa się z trzech niezależnych intensywności.
- Uwaga: postrzegany kolor nie odpowiada składowi widmowemu światła - można na nieskończenie wiele sposobów konstruować światło które wywoła określone wrażenie kolorystyczne!
- Jednak światło o różnych widmach w różnym stopniu podlega dyfrakcji, więc nawet jeśli na pozór świetlówka i żarówka dają taki sam kolor światła, percepcja obiektów przez nie oświetlonych może być inna!



Rysunek: Obraz rozbity na składowe RGB.



Rysunek: Stopień odpowiedzi ludzkiego aparatu percepcji na światło o określonej długości fali ustalony przez CIE (International Commission on Illumination) w 1931 roku. Zauważmy, że zielony i czerwony wcale nie są bardzo odległe!

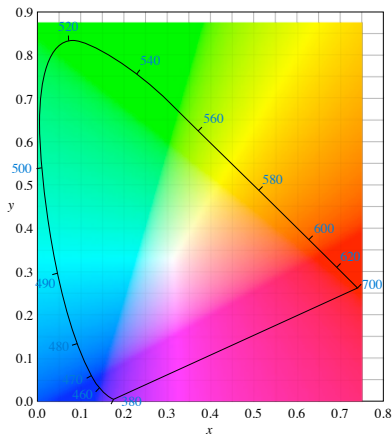


Przestrzeń kolorów CIE XYZ

Dla ustalonych funkcji odpowiedzi możemy wyliczyć całkowitą odpowiedź na światło o widmie $I(\lambda)$:

$$\begin{aligned} X &= \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{x}(\lambda) d\lambda \\ Y &= \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda \\ Z &= \int_0^{\infty} I(\lambda) \bar{z}(\lambda) d\lambda \end{aligned} \tag{1}$$

Zatem dla ustalonych funkcji odpowiedzi przestrzeń kolorów jest trójwymiarowa.

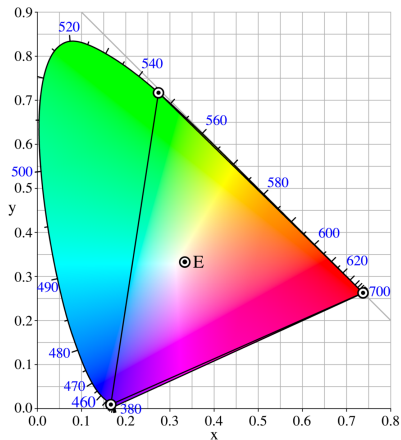


Rysunek: Diagram CIE 1931



Model CIE RGB

- Ze względów praktycznych (konstrukcji detektorów jak i urządzeń produkujących obraz) wygodnie jest rozpatrywać przestrzeń kolorów w której odpowiedź na sygnał maleje liniowo ze zmianą częstotliwości
- Takie modele rozpięte są na trzech kolorach (podstawowych), wszystkie inne kolory powstają jako suma ważona składowych podstawowych.
- W ramach ważenia należy także ustalić punkt bieli, czyli zestaw wag które produkują biel.
- Modele takie zazwyczaj rozpięte są na barwach podstawowych RGB (red, green, blue).
- Podzbiór kolorów danego modelu w przestrzeni CIE xyY nazywa się Gamutem.



Rysunek: Gamut CIE RGB



Modele RGB

- Dzisiejsze komputery zazwyczaj pracują w modelu *sRGB* o składowych $R = [0.64, 0.33]$, $G = [0.3, 0.6]$, $B = [0.15, 0.06]$ (w CIE_xyY) oraz punkcie bieli $D65 = [0.3128, 0.3290]$ odpowiadającemu temperaturze barwowej promieniowania ciała doskonale czarnego o temperaturze 6504K.
- Każde urządzenie takie jak monitor czy skaner ma swoje własne profile kolorystyczne i powinno być kalibrowane w celu uzyskania maksymalnej jakości obrazu. Niestety wiele osób nie ma o tym pojęcia...



Inne modele kolorów

Istnieje także wiele innych reprezentacji kolorów

- HSL - ze składowymi chromatycznymi Hue (odcień) i Saturation (natężenie) oraz składową luminacji Lightness
- HSV - podobny do HSL, jednak z inną reprezentacją luminacji
- CMYK - Cyan Magenta Yellow Black - model substraktywny używany w poligrafii
- YUV - ze składową luminacji luma (Y) oraz dwoma składowymi chromatycznymi UV - używany w telewizji (aby łagodnie przejść od telewizji czarno-białej do kolorowej) i kompresji JPEG
- CIE 1976 LAB ze składową luminacji L i składowymi chromatycznymi ab, opracowany ze szczególnym uwzględnieniem specyfiki ludzkiej percepcji



Zastosowania

- Po co w przetwarzaniu obrazu wszystkie te modele kolorów?
Nie lepiej ustalić jeden najlepszy i zapomnieć o innych?
- Rzecz w tym, że różne modele mają różne zalety i wady - nie ma najlepszego!
- Na koniec szybki przykład - wykorzystując pewne cechy obrazów i modeli barw pokażemy jak dobrze zrobić wyostrzanie.



Rysunek: Przykładowy obraz z lekkim szumem cieplnym.



Rysunek: Obraz wyostrzony w normalnej reprezentacji RGB (każdy kanał wyotrzany osobno).



Rysunek: Obraz wyostrzony jedynie w kanale L reprezentacji LAB.



Dziękuję za uwagę!