

Podstawy teoretyczne i algorytmy w modelu SIMP

Zespół 2

Streszczenie

Pakiet SIMP - Studencki Iteracyjny Model Przepływu, został wykonany jako projekt studencki w ramach programowania zespołowego na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Pakiet ten realizuje numeryczny model przepływu nieściśliwego w domenie kartezjańskiej na bazie uproszczonego równania Naviera-Stokesa (równania w postaci Eulera dla nieściśliwego fluidu), wraz z prostym modelowaniem zjawiska konwekcji. W pakiecie znajduje się program generujący domenę obliczeniową (SIMP::Konstruktor), program który rozwiązuje zagadnienie modelowania (SIMP::Iterator), oraz program prezentujący wyniki w postaci wygodnych wykresów 3d (SIMP:Prezenter). Ten dokument poświęcony jest aspektom teoretycznym oraz wykorzystanym algorytmom i rozwiązaniom technicznym związanych z programem rozwiązującym równania różniczkowe.

Spis treści

1	Wprowadzenie	4
2	Sformułowanie problemu	5
3	Uproszczenia	7
4	Schemat rozwiązania	9
	4.1 Dyskretyzacja	11
	4.2 Metoda charakterystyk	12
	4.3 Interpolacja	13
	4.4 Schematy numeryczne	15
	4.5 Równanie Poissona i projekcja	15
5	Metody rozwiązania układu równań liniowych	18
	5.1 Metoda gradientów sprzężonych	19
	5.2 Metoda relaksacji Jacobiego	20
	5.3 Metoda relaksacyjna Gaussa-Seidla	21
6	Siła zachowania rotacji	21
7	Dodatek A - szczegóły dyskretyzacji	22
7 8	Dodatek A - szczegóły dyskretyzacji Dodatek B - Przykładowe wyniki	22 24
7 8	Dodatek A - szczegóły dyskretyzacji Dodatek B - Przykładowe wyniki 8.1 Model 1 - symetryczne płytki	 22 24 24

2

1 Wprowadzenie

Zagadnienie modelowania towarzyszyło rozwojowi komputeryzacji od początku, wystarczy wspomnieć o projekcie Manhattan związanym z produkcją pierwszej bomby atomowej w roku 1945. Wtedy to po raz pierwszy komputer został wykorzystany do wykonania obliczeń naukowych opartych na modelu fizycznym. Następne lata rozwoju komputerów przyniosły także postęp w modelowaniu komputerowym, najpierw w chemii kwantowej, następnie w innych dziedzinach. W latach 60 XX wieku rozwinęła się gałąź modelowania zwana krótko CFD - Computational Fluid Dynamics, czyli obliczeniowa dynamika płynu. Znalazła ona zastosowanie w aerodynamice (projektowanie samolotów, promów kosmicznych, samochodów), modelowanie fal uderzeniowych i skutków eksplozji atomowych, hydrodynamice (projektowaniu zaawansowanych układów hydraulicznych), prognozach pogody itp. Ostatnio metody znane z CFD znalazły także zastosowanie w grafice komputerowej [1], w tym w modelowaniu realistycznie wygladającego dymu i płomieni. CFD to jedna z najbardziej owocnych metod modelowania pewnej klasy zjawisk fizycznych, która bez wątpienia przyczyniła się do rewolucji technologicznej w XX wieku. Projekt SIMP to dość prosty w porównaniu do swoich dojrzałych (i bardzo drogich) kuzynów, pakiet realizujący zagadnienie modelowania CFD. W naszym przypadku ograniczyliśmy się do fluidu nieściśliwego (co jak się okaże niżej, ma istotny wpływ na uproszczenie obliczeń), zastosowaliśmy bardzo prosty (realistyczny, chociaż nie do końca poprawny fizycznie) model konwekcji. Nasz problem rozwiązujemy na regularnej siatce kartezjańskiej (profesjonalne rozwiązania wykorzystują siatki o wymyślnych geometriach opartych o krzywe sklejalne, jednak wtedy już sam problem wygenerowania dobrej siatki staje się niebanalnym problemem informatycznym). Ograniczenia związane z realizacją naszego projektu (głownie czas, niewielka ilość dobrej literatury na ten temat i praktyczny brak kodu open source realizującego podobnego zadania na którym można by się wzorować lub rozwijać) zmusiły nas do poczynienia pewnych uproszczeń takich jak rezygnacja z urównoleglenia programu rozwiązującego równanie różniczkowe. Pewne cechy charakterystyczne tego rozwiązania powodują, że najlepiej do rozwiązywania tego typu problemów nadają się komputery wektorowe. Rozbicie problemu na zestaw maszyn z wymiana komunikatów jest dość mało efektywny ze względu na bardzo niewielką lokalność poszczególnych procesów.

2 Sformułowanie problemu

Podstawowym zadaniem w modelowaniu komputerowym jest najpierw dobrze opisać formalnie problem który chcemy rozwiązać. W naszym przypadku punktem wyjścia do sformułowania opisu jest zasada zachowania masy. Wyobraźmy sobie dwie równoległe powierzchnie A i B (rys. 1) odległe od siebie o δx . Przez powierzchnię A płynie ciecz o gęstości ρ z prędkością v. Zatem masa przemieszczająca się w czasie δt przez powierzchnię A wyraża się zależnością

$$\delta m_A = \rho v \delta t \tag{1}$$

gdzie ρ to gęstość
avto prędkość ośrodka w pozycji A. Odpowiednio, masa przepływająca prze
z powierzchnię B w czasie δt wyraża się wzorem

$$\delta m_B = \left(\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \delta x\right) \delta t \tag{2}$$

Reasumując, przypływ (lub odpływ) w przestrzeni pomiędzy powierzchniami jest zadany

$$\delta m = \delta m_A - \delta m_B = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \delta x \delta t \tag{3}$$

Kiedy zbiegniemy z rozmiarem badanego obszaru i krokiem czasowym do zera, czyli $\delta x \to 0$, $\delta t \to 0$, dostajemy równanie (tak zwane równanie zachowania masy) postaci

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

W przypadku trójwymiarowym powyższe równanie ma postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \tag{5}$$

Zachowanie masy to jednak nie wszystko, dochodzi jeszcze druga zasada zachowania, mianowicie zasada zachowania pędu. Pęd płynu między powierzchniami A i B jest determinowany wielkością pędu wprowadzanego i wyprowadzanego z układu przez powierzchnie A i B, a także przez różnice ciśnień pomiędzy tymi powierzchniami. Zakładając, że jedyną siłą działającą w tym układzie jest siła związana z różnica ciśnienia, oraz braku grawitacji i lepkości, przepływ pędu w jednostce czasu wyraża się wzorem

$$\delta h_1 = \rho v \times v - \left(\rho v^2 + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} \delta x\right) = -\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} \delta x \tag{6}$$



Rysunek 1: Przepływ ściśliwego płynu przez dwie powierznie jednostkowe AiBw sformułowaniu Eulera

Pęd generowany wewnątrz rozważanej objętości związany z różnicą ciśnień między A i B jest wprost proporcjonalny do tej siły. W efekcie pęd generowany na jednostkę masy z powodu gradientu ciśnienia wynosi

$$\delta h_2 = P - \left(P - \frac{\partial P}{\partial x}\delta x\right) = \frac{\partial P}{\partial x}\delta x \tag{7}$$

Zatem sumaryczna zmiana pędu w objętości δx dana jest następująco:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}\delta x = \delta h_1 + \delta h_2 = -\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x}\delta x - \frac{\partial P}{\partial x}\delta x \tag{8}$$

lub krócej

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$
(9)

Równanie powyższe to jednowymiarowe równanie zachowania pędu. Aby przetransformować to równanie do postaci trójwymiarowej zauważmy, że:

$$\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho v \times v)}{\partial x} = \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}$$
(10)

Trójwymiarowa forma tego równania jest łatwo powiązana z jednowymiarową zależnościami tensorowymi i wyraża się następująco:

$$\frac{\partial\rho v}{\partial t} + (\rho v \cdot \nabla)v + (\nabla \cdot \rho v)v + \nabla P = 0$$
(11)

Do powyższego równania można dodać jeszcze czynnik związany z lepkością zależny od pewnej stałej ν , oraz czynnik sił niezależnych (np. grawitacji) F. Reasumując otrzymujemy układ równań różniczkowych nieliniowych postaci:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) &= 0\\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + (\rho v \cdot \nabla) v + (\nabla \cdot \rho v) v + \nabla P - \nu \nabla^2 v & +F = 0 \end{cases}$$
(12)

zwanych też równaniem Naviera-Stokesa. To czy taki układ przy zadanych warunkach początkowych ma rozwiązanie analityczne jest problemem otwartym (jest to jedno z tak zwanych zagadnień milenijnych ¹), na dzień dzisiejszy jednak znalezienie ewentualnego rozwiązania lub nawet udowodnienie iż ono nie istnieje nie wydaje się bliskie. Pozostają jedynie metody numeryczne.

3 Uproszczenia

Równanie Naviera-Stokesa w postaci ogólnej jest bardzo skomplikowane do rozwiązania nawet metodami numerycznymi, z racji wysokiej niestabilności rozwiązania. Sporym utrudnieniem jest też fakt, że równanie to jest nieliniowe i wymyślenie sensownego schematu w tym przypadku nie jest wcale zadaniem banalnym. Dlatego do różnych rodzajów symulacji dokonuje się pewnych uproszczeń. Jednym z najczęściej stosowanych jest założenie, iż rozważane medium jest nieściśliwe. W przypadku modelowania ruchu cieczy takich jak na przykład woda, założenie to wydaje się w pełni uzasadnione. W przypadku gazów, jak powietrza, wydaje się jednak conajmniej podejrzane. Sytuacja jednak nie jest taka zła, powietrze zachowuje się z dużą dokładnością nieściśliwie, o ile tylko rozważane prędkości są znacznie poniżej prędkości dźwięku. Czynnikiem który powoduje opór przy sprężaniu powietrza jest jego ciśnienie, które jest proporcjonalne do jego energii cieplnej na jednostkę objętości. Ta z kolei jest charakteryzowana przez średniokwadratowa prędkość pojedynczych cząsteczek. Na przykład pojedyncze cząsteczki Azotu, podstawowego składnika powietrza, w temperaturze 300K poruszaja się z prędkościa średnia $2.66 \cdot 10^5 m^2 s^{-2}$. Jeśli porównamy to z prędkościami rzędu 60 km/h czyli $277m^2s^{-2}$ zauważymy, że energia termiczna znacznie przekracza energię mogącą powstać w wyniku ściskania powietrza przy tym zakresie predkości. Zatem powietrze w rozsadnym zakresie predkości jest

¹http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/

3 UPROSZCZENIA

prawie nieściśliwe. Jakie zatem uproszczenie równania 12 otrzymamy przy tym założeniu? Zauważmy, że nieściśliwość oznacza, że $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, zatem gęstość jest stała w czasie i przestrzeni. Można bez straty ogólności rozumowania założyć, że $\rho = 1$. Podstawiając do równania 5, otrzymamy

$$\nabla v = 0 \tag{13}$$

dostajemy zatem dość prosty warunek geometryczny, pole prędkości powinno być bezźródłowe (o zerowej dywergencji). Dokładając ten warunek do równania 11, dodając lepkość i siły zewnętrzne otrzymujemy

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\nabla P - \nu \nabla^2 v + F \tag{14}$$

W projekcie SIMP skupiamy się raczej na ruchu gazów niż cieczy, dlatego czynnik odpowiedzialny za lepkość można z równania usunąć bez wielkiej straty dla modelu. W efekcie wyjściowym układem równań rozwiązywanym w modelu SIMP jest

$$\begin{cases} \nabla v &= 0\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -(v \cdot \nabla)v - \nabla P + F \end{cases}$$
(15)

Pewnego komentarza wymaga jeszcze zewnętrzna siła F. Generalnie może to być jakiekolwiek pole siły (zależne lub nie od czasu), w naszym modelu jednak chcieliśmy wprowadzić prosty schemat konwekcji. Aby to zrobić, wprowadzamy nowe pole skalarne temperatury T, i dajemy następujące zależności

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(u \cdot \nabla)T \tag{16}$$

Oznacza to, że pole temperatury podlega adwekcji razem z resztą ośrodka. Wiemy jednak, że w przyrodzie występuje jeszcze jeden rodzaj rozchodzenia się ciepła (jak i substancji znajdujących się w ośrodku fizycznym), mianowicie dyfuzja. Zamodelowanie dyfuzji zgodnie ze znanym opisem fizycznym jest dość trudne, w naszym modelu zastosowaliśmy znacznie uproszczone podejście, dające jednak dobre rezultaty. Fakt dyfuzji ciepła można potraktować jako rozmycie (blur) następujące na polu temperatury domeny. Wykonujemy zatem splot temperatury z odpowiednim filtrem dolnoprzepustowym przed wykonaniem adwekcji. Parametry filtra pozwalają kontrolować zależlości między

4 SCHEMAT ROZWIĄZANIA

dyfuzją a adwekcją, zaś model daje realistyczne rezultaty. Po określeniu zależności jakie spełnia pole temperatury, możemy zdefiniować siłę wyporu jak następuje

$$F = \beta (T - T_{ot})z \tag{17}$$

dla pewnej liczby β oraz wektora z = [0, 0, 1]. Wynika z tego, że pojawia się lokalna siła proporcjonalna do różnicy temperatury ośrodka w danym punkcie T i temperatury średniej w otoczeniu punktu T_{ot} , skierowana w kierunku pionowym z. Takie założenie oczywiście nie jest zgodne z naszą wiedzą na temat zjawiska konwekcji, jednak w pewien dość intuicyjny sposób modeluje ono pojawienie się siły wyporu (w obecności grawitacji oczywiście). Cieplejsze fragmenty ośrodka mają tendencję do wypływania ku górze, zimniejsze przemieszczają się w dół. Ponadto pojawiają się tutaj zaburzenia lokalne, kiedy np. całkiem ciepły voxel otoczony znacznie cieplejszymi w istocie daje ujemną składową wyporu. Istnieją jednak pewne niebezpieczeństwa wynikające z brania odpowiedniego otoczenia. Okazuje się, że najlepiej brać jest średnią temperatury po najbliższym sąsiedztwie voxela (w sensie sąsiedztwa von Neumana - czyli tak jak liczy się dyskretny laplasjan), z wykluczeniem sąsiedztwa będącego warunkiem brzegowym. W dalszej części dokumentu opiszemy jeszcze jeden składnik siły zewnętrznej odpowiedzialny za dodawanie utraconej energii rotacji (rozdział 6).

4 Schemat rozwiązania

Przypomnijmy, że mamy do czynienia z nieliniowym równaniem różniczkowym danym wzorem:

$$\begin{cases} \nabla v &= 0\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -(v \cdot \nabla)v - \nabla P + F \end{cases}$$
(18)

W rzeczywistości równanie to jest zapisane w powyższej formie dość oszczędnie, należało by je rozpisać na każdą współrzędną z osobna, aby przejść do jakiegokolwiek schematu różnicowego. Nie będziemy jednak tego robić, gdyż zaproponujemy inne podejście do rozwiązania tego równania. Wykorzystamy mianowicie schemat Lagrange'a oparty o metodę charakterystyk (znaną w literaturze anglojęzycznej pod nazwą "semi-Lagrangian scheme") do wykonania pierwszego kroku rozwiązania, następnie wykorzystamy metodę projekcji (znanej także jako metoda ciśnień) i rozwiążemy równanie Poissona z warunkami brzegowymi von Neumana aby zadbać by nasze rozwiązanie



Rysunek 2: Schemat pojedynczego voxela wykorzystywanego w symulacji. Składowe prędkości są określone na ścianach, zaś pola skalarne takie jak ciśnienie i temperatura w środku.

było bezźródłowe. W największym skrócie nasz schemat rozwiązania wygląda następująco:

• Dodajemy do aktualnego pola prędkości vsiłę zewnętrzną,

$$v^{(1)} = v + \Delta t F \tag{19}$$

• Wykonujemy samoadwekcję, rozwiązując za pomocą metody charakterystyk (opisanej dalej) równanie:

$$v^{(2)} = v^{(1)} - \Delta t (v^{(1)} \cdot \nabla) v^{(1)}$$
(20)

Podobne równanie rozwiązujemy dla pola temperatury.

• Wykonujemy projekcję pola $v^{(2)}$ na pole o zerowej dywergencji najpierw wyliczając pole ciśnienia z równania Poissona postaci:

$$\nabla^2 P = \frac{1}{\Delta t} \nabla v^{(2)} \tag{21}$$

następnie odejmując

$$v^{(3)} = v^{(2)} - \Delta t \nabla P \tag{22}$$

4.1 Dyskretyzacja

Rozwiązanie równania różniczkowego polega na zdyskretyzowaniu go, i rozwiązaniu odpowiadającego układu równań różnicowych. W naszym przypadku domenę obliczeniową dzielimy na pewną liczbę sześcianów zwanych dalej voxelami. W centrum każdego voxela określamy pola skalarne czyli ciśnienie i temperaturę. W punktach centralnych ścian voxela określamy odpowiednie składowe prędkości (rys 2). Ponadto zakładamy że pewne voxele są "wolne" to znaczy modelują one ośrodek, zaś pewne inne voxela są "zajęte" to znaczy modelują ciała stałe zanurzone w ośrodku. Voxele "zajęte" stanowią warunki brzegowe w naszej dyskretyzacji i spełniają warunki:

- Wszystkie składowe prędkości na ściana voxela "zajętego" są zawsze zerowe.
- Pochodna kierunkowa ciśnienia wzdłuż normalnej do dowolnej ściany voxela "zajętego" jest zerowy.

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \tag{23}$$

Powyższy warunek nosi nazwę warunku brzegowego von Neumana.

Przy takich założeniach dyskretna domena obliczeniowa może modelować skomplikowane kształty zbudowane z voxeli niczym z klocków. Słowo komentarza jest jeszcze potrzebne na temat warunków brzegowych na krańcach domeny. Mogą być one dwojakie:

- Zamknięte zakładamy ze dopełnienie domeny jest warunkiem brzegowym w sensie voxela "zajętego".
- Cykliczne zakładamy że domena ma topologię torusa, przechodząc przez jedną ze ścian powracamy do domeny z drugiej strony.

Dla domen cyklicznych bez warunków brzegowych wewnątrz istnieje elegancka metoda rozwiązania równania Naviera-Stokesa za pomocą transformat Fouriera. Nie będziemy jednak z tej metody korzystać ze względu na szczególne warunki wymagane wobec domeny, które w naszym przypadku są niepraktyczne. Metoda ta została pobieżnie opisana w [2].



Rysunek 3: Trajektoria (charakterystyka) w polu wektorowym wykonana w tył o Δt . Wartość w punkcie końcowym charakterystyki służy jako nowa wartość w nowym polu.

4.2 Metoda charakterystyk

Metoda ta jest dość znana, w podobnym zastosowaniu została opisana w [2]. Wyobraźmy sobie pole wektorowe, które określa ruch ośrodka w pewnej chwili t. Załóżmy że mamy pewne pole skalarne p, chcemy się dowiedzieć jak zmieni się to pole przy założeniu że jest ono deformowane (przekształcane) jedynie przez zadane pole wektorowe. Taki rodzaj przekształcenia nazywamy adwekcją, w naszym równaniu odpowiada mu czynnik $(v \cdot \nabla)v$. Rozważmy trajektorię w tym polu startującą z pewnego punktu x_0 w którym chcemy określić nową wartość p, cofającą się w czasie o krok $-\Delta t$. Wartość szukanego przez nas pola p na końcu tej trajektorii w punkcie x_k wynosi $p(x_k, t)$. Zauważmy jednak, że jeśli w czasie Δt pole wektorowe pozostanie stałe, to wartość $p(x_k, t) = p(x_0, t + \Delta t)$. Wynika to z tego, że wartość ta "napłynie" po wyznaczonej trajektorii do punktu x_0 w czasie Δt . Uzyskujemy zatem dość prosty schemat liczenia równania adwekcji, jak niżej:

- dla każdego punktu środkowego voxela poprowadź charakterystykę w tył o kroku Δt .
- wyznacz punkt końcowy charakterystyki.
- interpoluj wartość poszukiwanego pola w punkcie końcowym charakterystyki.
- przyjmij wyznaczoną wartość jako nową wartość dla punktu środkowego voxela.

4 SCHEMAT ROZWIĄZANIA

W podobny sposób wykonujemy samoadwekcję pola prędkości startując charakterystyki z punktów środkowych ścian voxeli i interpolując na ich końcu odpowiednią składową prędkości. Zauważmy że metoda ta jest bezwarunkowo stabilna o ile tylko schemat interpolacji nie wykracza poza dane. W takim przypadku max_{t+ Δt} $p \leq \max_t p$ dla dowolnego pola p. Interpolacja ma też kluczowe znaczenie przy liczeniu samej charakterystyki. Istotny wpływ ma też dobór odpowiedniego schematu całkowania numerycznego charakterystyki. W modelu SIMP do dyspozycji jest prosty schemat Eulera i schemat Rungego-Kutty drugiego rzędu. Metoda charakterystyk jest dość prosta w sformułowaniu, kryją się w niej jednak pewne szczegóły które opiszemy niżej. W szczególności opisu wymaga zachowanie się na warunkach brzegowych. W tym przypadku jest ono niezwykle proste - kiedy charakterystyka natrafia na "zajęty" voxel, jest przycinana tuż przed jego brzegiem. Reszta przebiega tak samo jak poprzednio, interpolowana jest wartość itd.

4.3 Interpolacja

Domena obliczeniowa jest zdyskretyzowana, zatem przechowujemy tylko wybrane wartości wszystkich pól. Liczenie charakterystyki oraz obliczanie wartości na jej końcach wymaga interpolacji. Dobór odpowiedniego schematu interpolacji ma kluczowy wpływ na poprawność otrzymywanych wyników. W modelu SIMP zastosowaliśmy schemat interpolacyjny Sheparda, ponieważ jego sformułowanie nie zależy zupełnie od wymiaru rozpatrywanej przestrzeni i jest dość szybki. Załóżmy że mamy zbiór punktów $\{x_1, ..., x_n\}$ oraz wartości pewnej funkcji f w tych punktach $\{f(x_1), ..., f(x_n)\}$. Chcemy zinterpolować wartość funkcji f w pewnym nowym punkcie x. Obliczamy ją według wzoru:

$$\hat{f}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\|x - x_i\|}^{-p} \cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\|x - x_i\|}^{-p}}$$
(24)

który można nieco uprościć kładąc $d(x, x_i) = \sqrt{\|x - x_i\|}$ (odległość punktów - to jedyna rzecz która odróżnia schematy Sheparda dla różnych wymiarów)

$$\hat{f}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} d(x, x_i)^{-p} \cdot f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} d(x, x_i)^{-p}}$$
(25)

dla pewnej liczby naturalnej p określającej stopień gładkości interpolacji. W praktyce przyjmuje się p = 2. W projekcie SIMP, dla każdego punktu



Rysunek 4: Interpolacja Sheparda dla czterech punktów węzłowych (na rogach kwadratu) w wersji 2d.



Rysunek 5: Na granicy dwóch obszarów interpolacji może pojawić się nieciągłość.

wewnątrz domeny obliczeniowej wyznaczanych jest osiem najbliższych punktów węzłowych szukanego pola i wykonywana jest interpolacja podobnie jak na rysunku 4 gdzie pokazany jest przypadek dwuwymiarowy. Pewne problemy mogą pojawiać się na krawędziach dwóch obszarów interpolacji (tak jak na rys 5 w przypadku dwuwymiarowym) gdzie pojawia się nieciągłość. W praktyce jednak te nieciągłości nie są wielkie (spowodowane są różnicami w wartościach odległych punktów węzłowych, których wkład jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu odległości) dlatego zaniedbujemy ich istnienie. Najważniejsze jest to, że schemat Sheparda nie wykracza nigdy poza zakres danych co gwarantuje stabilność metody charakterystyk.

4.4 Schematy numeryczne

W metodzie charakterystyk do wyliczenia trajektorii wykorzystujemy dowolny schemat numeryczny całkowany w interpolowanym polu wektorowym. W pakiecie SIMP do wyboru są dwa schematy: Eulera pierwszego rzędu i Rungego-Kutty drugiego rzędu. W praktyce oczywiście lepiej stosować ten drugi, jednak jest on nieco wolniejszy, zatem czasem gdy w grę wchodzi czas, wygodnie jest zastosować schemat Eulera:

$$x_{i+1} = x_i + hF(t_i, x_i)$$
(26)

Zastosowany w modelu SIMP schemat Rungego-Kutty wyraża się następująco:

$$k_{1} = F(t_{i}, x_{i})$$

$$k_{2} = F\left(t_{i} + \frac{h}{2}, x_{i} + \frac{h}{2}k_{1}\right)$$

$$k_{3} = F\left(t_{i} + \frac{h}{2}, x_{i} + \frac{h}{2}k_{2}\right)$$

$$k_{4} = F(t_{i} + h, x_{i} + hk_{3})$$

$$x_{i+1} = x + \frac{h}{6}(k_{1} + 2k_{2} + 2k_{3} + k_{4})$$
(27)

W przypadku liczenia charakterystyki schematy te przyjmują prostszą postać w której pole F nie zależy od czasu (zakładamy, że w czasie liczenia charakterystyki pole się nie zmienia).

4.5 Równanie Poissona i projekcja

Po wyliczeniu nowego pola za pomocą metody charakterystyk, pozostaje nam wykonać jego projekcję na pole o zerowej dywergencji. Oczywiście metoda charakterystyk nie zachowuje dywergencji, zatem istotnie jest to zadanie do wykonania. Do tego celu wykorzystamy metodę projekcji, opartą o pewne własności pól wektorowych. Do tego celu potrzebne będzie jedno istotne twierdzenie:

Twierdzenie 4.5.1. Helmholtz'a-Hodge'a o dekompozycji pola wektorowego. Niech dane będzie pole wektorowe $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1 . Wtedy pole w jest sumą:

$$w = u + \nabla q \tag{28}$$

4 SCHEMAT ROZWIĄZANIA

gdzie $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest polem wektorowym takim, że $\nabla u = 0$ oraz $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest polem skalarnym.

Reasumując można wprowadzić operator rzutowania (projekcji) $\mathbb{P}(_)$ taki, że:

$$\mathbb{P}(w) = u = w - \nabla q \tag{29}$$

który dane pole wektorowe rzutuje na jego część bezźródłową. Aplikując operator rzutowania do równania 12 otrzymujemy

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathbb{P}(\frac{\partial v}{\partial t}) =
= \mathbb{P}(-(v \cdot \nabla)v - \nabla P + F) = \mathbb{P}(-(v \cdot \nabla)v + F))$$
(30)

Skorzystaliśmy z faktu, że $\mathbb{P}(v) = v$ oraz $\mathbb{P}(\nabla P) = 0.$ Zatem w efekcie

$$\mathbb{P}(-(v\cdot\nabla)v+F) = (-(v\cdot\nabla)v+F) - \nabla P \tag{31}$$

Czyli naszym polem skalarnym w dekompozycji Helmholtz'a-Hodge'a jest po prostu pole ciśnienia. Jak jednak to pole wyliczyć? Wymaga to odrobiny sprytu, okazuje się że pole to można wyznaczyć znając dywergencję pola powstałego we wstępnej fazie symulacji które oznaczaliśmy $v^{(2)}$. Przypomnijmy równanie 12 i przegrupujmy trochę wyrazy:

$$\nabla P = -\frac{\partial v}{\partial t} - (v \cdot \nabla)v + F \tag{32}$$

Zastosujmy teraz obustronnie operator dywergencji ∇ :

$$\nabla^2 P = \nabla \left(-\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \nabla (v \cdot \nabla)v + \nabla F \tag{33}$$

Skoro dywergencja $\nabla v=0,$ zatem $\nabla \frac{\partial v}{\partial t}=0,$ możemy napisać

$$\nabla^2 P = \nabla(-(v \cdot \nabla)v + F) \tag{34}$$

Prawą stronę w nawiasie przybliżyliśmy oczywiście przez $\frac{v^{(2)}-v}{\Delta t}$, zatem

$$\nabla^2 P = \frac{1}{\Delta t} \nabla v^{(2)} \tag{35}$$

Mamy zatem do rozwiązania klasyczne równanie Poissona z wyżej wspomnianymi warunkami brzegowymi von Neumana. Aby je rozwiązać posłużymy

4 SCHEMAT ROZWIĄZANIA

się metodą siatek. W przypadku dwuwymiarowym dyskretne przybliżenie laplasjanu otrzymamy w następujący sposób:

$$\frac{P_{i+1,j} + P_{i-1,j} - 2P_{i,j}}{h^2} + \frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1} - 2P_{i,j}}{h^2}$$
(36)

Gdzie h jest skokiem siatki. Dyskretną dywergencję obliczamy według schematu

$$(\nabla v)_{i,j} = \frac{v_{i+1/2,j}^x - v_{i-1/2,j}^x + v_{i+1/2,j}^y - v_{i-1/2,j}^y}{h}$$
(37)

Zastosowana tutaj konwencja notacyjna $v_{i+1/2,j}^x$ oznacza, że chodzi o składową prędkości w kierunku x, pochodzącą ze ściany voxela (i, j) położonej dalej początku układu współrzędnych (jak pamiętamy składowe prędkości określone są na ścianach voxeli, zatem każdemu z nich odpowiada para składowych w danym kierunku oznaczana tutaj dla wygody indeksami +1/2 i -1/2). Analogicznie postępujemy w przypadku trójwymiarowym. Dyskretyzując równanie 35 otrzymamy układ

$$P_{i+1,j} + P_{i-1,j} + P_{i,j+1} + P_{i,j-1} - 4P_{i,j} = \frac{h}{\Delta t} \nabla v_{i,j}^{(2)}$$
(38)

gdzie i = 1..n, j = 1..m oraz m i n to ilość voxeli w odpowiednich kierunkach. Analogiczny układ otrzymamy w przypadku trójwymiarowym. Przypomnijmy jeszcze, że musimy do tego układu dodać warunek brzegowy postaci $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ dla normalnych do ścian "zajętych" voxeli. Zdyskretyzowanie takiego warunku wymaga nieco pomysłowości. W przypadku gdy mamy do czynienia z wewnętrznym voxelem całej ściany voxeli "zajętych" przyjmujemy warunek jak na rys 6. W przypadkach bardziej skomplikowanych przyjmujemy odpowiednio "minus średnia po wszystkich otaczających voxelach które nie są zajęte", jak na rys 7. W przypadku trójwymiarowym możliwych sytuacji jest jeszcze trochę więcej, we wszystkich przypadkach jednak postępujemy analogicznie. Macierz układu tworzymy raz, przed całą symulacją. Mamy tyle zmiennych ile "wolnych" voxeli, co może oznaczać liczby rzędu setek tysięcy lub nawet milionów. Przechowywanie całej macierzy tego rozmiaru też nie wchodzi w grę ze względu na wymagania pamięciowe. Zauważmy jednak kilka faktów:

• Układ jest rzadki. W każdym wierszu w przypadku dwuwymiarowym nie może być więcej jak 9 niezerowych współczynników, zaś w trójwymiarowym odpowiednio 31.



Rysunek 6: Dyskretyzacja warunku brzegowego von Neumana w prostym przypadku, gdy mamy do czynienie ze ścianą voxeli.

• Układ jest symetryczny.

Narzut pamięciowy zatem nie jest zbyt duży gdy dla kadego wiersza pamięta się jedynie pozycje niezerowych współczynników oraz ich wartości. Zupełnie inną kwestią jest sposób rozwiązania tego układu. Rozmiar macierzy rzędu setek tysięcy wierszy wyklucza metodę eliminacji Gaussa, tym bardziej że macierz odwrotna do rzadkiej nie musi (i zazwyczaj nie jest) rzadka. Pozostają zatem metody gradientowe i relaksacyjne.

5 Metody rozwiązania układu równań liniowych

Jak już wspomnieliśmy, dyskretne rozwiązanie równania Poissona wymaga rozwiązania rzadkiego, symetrycznego układu równań liniowych z wielką ilością zmiennych. Metody algebraiczne w tym przypadku są bezużyteczne, z powodu ograniczeń pamięciowych i czasowych. Na szczęście znane są szybkie metody znajdowania rozwiązań przybliżonych, które nie mają mankamentów metod algebraicznych. W naszym wypadku rozwiązanie przybliżone jest zupełnie satysfakcjonujące, o ile tylko jest ono wystarczająco dokładne. Poniżej zamieszczamy opis trzech metod przybliżonych, które są dostępne w modelu SIMP.



Rysunek 7: Dyskretyzacja warunku brzegowego von Neumana w odrobinę bardziej skomplikowanym przypadku.

5.1 Metoda gradientów sprzężonych

Metoda ta znana jest w literaturze pod nazwą "Conjugate gradient method", procedury ją implementujące prawie zawsze zawierają w nazwie "CG". Pomysł wykorzystany w tej metodzie jest bardzo prosty: zamiast obliczyć rozwiązanie równania

$$Ax = b \tag{39}$$

będziemy minimalizować funkcję

$$f(x) = \frac{1}{2} \left\| Ax - b \right\|^2$$
(40)

Funkcja kwadratowa jest wypukła i oczywiście o ile tylko układ Ax = b nie jest sprzeczny, funkcja f posiada dokładnie jedno minimum globalne. Aby je znaleźć wystarczy policzyć gradient f:

$$\nabla f = A^T (Ax - b) \tag{41}$$

Następnie znajdujemy taką wartość skalarną λ , która będzie minimalizować f w kierunku gradientu, czyli musi spełniać

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{2} \|A(x+\lambda\nabla f) - b\|^2 = 0$$
(42)

Po wykonaniu obliczeń otrzymujemy, że

$$\lambda = -\frac{(A\nabla f)^2 \cdot (Ax - b)}{\|A\nabla f\|^2}$$
(43)

W ten sposób z pewnego przybliżenia rozwiązania x otrzymujemy nowe, lepsze przybliżenie $x + \lambda \nabla f$. Zbieżność procesu zależy od geometrii przekształcenia f. W pewnych przypadkach mogą się zdarzyć plateau lub doliny w których gradient będzie bardzo niewielki. Dla macierzy rzadkich nie jest jednak najgorzej, po kilkudziesięciu iteracjach można zazwyczaj dostać zadowalające rozwiązanie.

5.2 Metoda relaksacji Jacobiego

Metody relaksacyjne (iteracyjne) polegają na wytworzeniu schematu iteracyjnego, który w kolejnych krokach będzie przybliżał rozwiązanie. Metoda Jacobiego jest jedną z najprostszych procedur tego typu, jednak daje całkiem zadowalające rezultaty. Rozważmy układ

$$Ax = b \tag{44}$$

Macierz A możemy zapisać jako sumę macierzy

$$A = L + D + U \tag{45}$$

gdzie macier
zLjest dolnotrójkątna, D- diagonalną,
 U- górnotrójkątną. UkładAx=bmożemy zatem zapisać w postaci

$$(L+D+U)x = b \tag{46}$$

przekształcając dochodzimy do postaci

$$Dx = -(L+U)x + b \tag{47}$$

i dalej

$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$
(48)

co prowadzi do schematu iteracyjnego postaci

$$x^{k+1} = -D^{-1}(L+U)x^k + D^{-1}b$$
(49)

który jest zbieżny o ile tylko promień spektralny² macierzy $-D^{-1}(L+U)$ jest mniejszy od 1. Jawny wzór na i-tą współrzędną nowego przybliżenia wyraża się następująco

$$x_i^{k+1} = \frac{-\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^k + b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, ..., n$$
(50)

przy czym oczywiście $a_{ii} \neq 0$.

²Maksimum modułów wartości własnych macierzy.

5.3 Metoda relaksacyjna Gaussa-Seidla

Podobnie jak w poprzednim wypadku przekształcimy układ Ax = b do postaci w której widać będzie schemat iteracyjny. Ponownie rozkładamy macierz A na sumę

$$A = L + D + U \tag{51}$$

mamy

$$(L+D+U)x = b \tag{52}$$

skąd

$$(L+D)x = -Ux + b \tag{53}$$

Z powyższej zależności wynika schemat iteracyjny

$$(L+D)x^{k+1} = -Ux^k + b (54)$$

to jest

$$x^{k+1} = -(L+D)^{-1}Ux^k + (L+D)^{-1}b$$
(55)

który jest zbieżny o ile promień spektralny macierzy $-(L + D)^{-1}U$ jest mniejszy od 1. Jawny wzór na i-tą współrzędną nowego przybliżenia wyraża się następująco

$$x_i^{k+1} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k + b_i}{a_{ii}}$$
(56)

przy czym oczywiście $a_{ii} \neq 0$. Schemat ten jest zazwyczaj szybszy od schematu Jacobiego, pomimo porównywalnej prostoty w programowaniu.

6 Siła zachowania rotacji

Zastosowana w naszym modelu metoda rozwiązywania adwekcji za pomocą charakterystyk ma sporo zalet (głownie stabilność) ale i jedną zasadniczą wadę. Szybko wygaszane w symulacji są ruchy lokalne mas ośrodka, związane z rotacją. Przypomnijmy, mając dane pole wektorowe v rotację określamy jako $\nabla \times v$ (iloczyn wektorowy). Rotacja jest zatem polem wektorowym, którego kierunki determinują oś wokół której następuje lokalny ruch obrotowy ośrodka, zaś długość determinuje stopień z jakim ten ruch następuje. Ruchy rotacyjne odpowiedzialne są za wszelkiego rodzaju wiry, drobne zaburzenia i turbulencje. Szybkie wygaszanie tego typu ruchów powoduje, że model przestaje być naturalny. Zagadnienie to było sporym problemem w modelowaniu CFD do lat 90, kiedy została wynaleziona przez Steinhoffa [4] metoda zachowania rotacji ("vorticity confinement"). Znalazła ona zastosowanie między innymi w modelowaniu właściwości aerodynamicznych łopat śmigieł helikopterów, gdzie z powodów ograniczeń technicznych nie można było wytworzyć odpowiednio gęstej siatki. Po zastosowaniu metody Steinhoffa uzyskano zadowalające wyniki na stosunkowo rzadkich siatkach. Ponieważ w modelu SIMP stosujemy właśnie dość rzadkie siatki, więc dodaliśmy powyższe rozwiązanie. Zobaczmy jaki jest mechanizm działania opisanej metody. Najpierw wyliczamy rotację pola v jak poniżej

$$\omega = \nabla \times v \tag{57}$$

Jak wspomnieliśmy, każdy wektor rotacji można interpretować jak koło zamachowe próbujące rozkręcić ośrodek wokół siebie. Metoda charakterystyk wygasza działanie tych kół zamachowych, pomysł polega na tym, aby dodać je z powrotem do pola w postaci dodatkowej siły. Najpierw liczymy znormalizowany gradient modułu rotacji

$$\eta = \nabla \|\omega\| \tag{58}$$

$$N = \frac{\eta}{\|\eta\|} \tag{59}$$

Pole N wskazuje kierunek od mniejszych do większych koncentracji rotacji. Następnie liczona jest siła która w miejscach o wysokiej rotacji dodatkowo rozkręca ośrodek w odpowiednim kierunku według zależności

$$f_{rot} = \epsilon h(N \times \omega) \tag{60}$$

dla pewnej stałej $\epsilon > 0$. Siła ta jak widać jest także zależna od skoku siatki h i zanika gdy $h \rightarrow 0$. W modelu SIMP siła zachowania rotacji jest obliczana przed właściwym cyklem modelu, i jest dodawana do siatki wraz z siłą wyporu.

7 Dodatek A - szczegóły dyskretyzacji

Poniżej zamieszczamy schematy dyskretyzacji wszystkich parametrów fizycznych rozpatrywanych w modelu SIMP zgodnie z opisami zamieszczonymi

7 DODATEK A - SZCZEGÓŁY DYSKRETYZACJI

wyżej. I tak pola skalarne ciśnienia i temperatury określone w centrach voxeli tworzą odpowiednio trójwymiarowe tablice

$$T_{i,j,k}, \quad P_{i,j,k} i = 1...N, j = 1...M, k = 1...L$$
(61)

Pole prędkości składa się z trzech osobnych tablic, po jednej dla każdej składowej

$$v_{i,j,k}^{(x)}, \quad i = 1...N + 1, j = 1...M, k = 1...L$$

$$v_{i,j,k}^{(y)}, \quad i = 1...N, j = 1...M + 1, k = 1...L$$

$$v_{i,j,k}^{(z)}, \quad i = 1...N, j = 1...M, k = 1...L + 1$$
(62)

Dodatkowo używamy notacji znanej z literatury CFD, i na przykład przez $v_{i+1/2,j,k}^{(x)} = v_{i+1,j,k}^{(x)}$, zaś $v_{i-1/2,j,k}^{(x)} = v_{i,j,k}^{(x)}$. Pseudoindeks 1/2 służy do określenia ściany na której określona jest interesująca nas składowa względem voxela (i, j, k). W takiej notacji dyskretna dywergencja pola prędkości wyraża się następująco

$$(\nabla v)_{i,j,k} = (v_{i+1/2,j,k}^x - v_{i-1/2,j,k}^x + v_{i,j+1/2,k}^y - v_{i,j-1/2,k}^y + v_{i,j,k+1/2}^z - v_{i,j,k-1/2}^z)/h$$
(63)

Dyskretny gradient pola ciśnienia $\nabla P = (P_x, P_y, P_z)$ to odpowiednio

$$(P_x)_{i+1/2,j,k} = (P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k})/h$$

$$(P_y)_{i,j+1/2,k} = (P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k})/h$$

$$(P_z)_{i,j,k+1/2} = (P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k})/h$$
(64)

Dyskretny laplasjan to kombinacja operacji gradientu i dywergencji

$$(\nabla^2 P)_{i,j,k} = (P_{i+1,j,k} + P_{i-1,j,k} + P_{i,j+1,k} + P_{i,j-1,k} + P_{i,j,k+1} + P_{i,j,k-1} - 6P_{i,j,k})/h^2$$
(65)

Aby policzyć dyskretną rotację, najpierw trzeba dokonać uśrednienia pola prędkości do środków voxeli

$$\overline{v}_{i,j,k}^{(x)} = (v_{i-1/2,j,k}^{(x)} + v_{i+1/2,j,k}^{(x)})/2$$

$$\overline{v}_{i,j,k}^{(y)} = (v_{i,j-1/2,k}^{(y)} + v_{i,j+1/2,k}^{(y)})/2$$

$$\overline{v}_{i,j,k}^{(z)} = (v_{i,j,k-1/2}^{(z)} + v_{i,j,k+1/2}^{(z)})/2$$
(66)

wtedy

$$\omega_{i,j,k}^{(x)} = ((\overline{v}_{i,j+1,k}^{(z)} - \overline{v}_{i,j-1,k}^{(z)}) \\
- (\overline{v}_{i,j,k+1}^{(y)} - \overline{v}_{i,j,k-1}^{(y)}))/2h \\
\omega_{i,j,k}^{(y)} = ((\overline{v}_{i,j,k+1}^{(x)} - \overline{v}_{i,j,k-1}^{(x)}) \\
- (\overline{v}_{i+1,j,k}^{(z)} - \overline{v}_{i-1,j,k}^{(z)}))/2h \\
\omega_{i,j,k}^{(z)} = ((\overline{v}_{i+1,j,k}^{(y)} - \overline{v}_{i-1,j,k}^{(y)}) \\
- (\overline{v}_{i,j+1,k}^{(x)} - \overline{v}_{i,j-1,k}^{(x)}))/2h$$
(67)

Wszystkie siły rozważane w naszym modelu (siła wyporu i zachowania rotacji) są określone z definicji w centrach voxeli. Przed dodaniem ich do składowych prędkości trzeba je uśrednić. Mając dane pole sił $f = (f^1, f^2, f^3)$ dostajemy

$$v_{i+1/2,j,k}^{(x)} + = \Delta t (f_{i,j,k}^1 + f_{i+1,j,k}^1)/2$$

$$v_{i,j+1/2,k}^{(y)} + = \Delta t (f_{i,j,k}^2 + f_{i,j+1,k}^2)/2$$

$$v_{i,j,k+1/2}^{(z)} + = \Delta t (f_{i,j,k}^3 + f_{i,j,k+1}^3)/2$$
(68)

8 Dodatek B - Przykładowe wyniki

8.1 Model 1 - symetryczne płytki

Poniżej zaprezentujemy wizualne wyniki powstałe z 12 kroków symulacji na siatce $40 \times 40 \times 40$ wykonanej w modelu SIMP. Parametry tego modelu to $\beta = 0.5$, $\epsilon = 0.7$, h = 1, $\Delta t = 2$. Model przedstawia sześcian o stałej temperaturze równej 3.0. Na dolnej i górnej ścianie sześcianu znajdują się warunki brzegowe ustawiające temperaturę, u góry jest chłodniejszy element (temperatura 2.0), na dole element grzejący (temperatura 4.0). Oczywiście układ z takimi warunkami brzegowymi przejawia dynamikę chwiejną, spodziewamy się iż powinny nastąpić dwa symetryczne kierunki napływu (z góry na dół oziębionego ośrodka i z dołu do góry ocieplonego ośrodka), zgodnie z prostym modelem konwekcji jaki został zaimplementowany w modelu. Rysunek 8 prezentuje pole temperatury ośrodka, dla wygody temperatura średnia jest na rysunku przezroczysta, nieprzezroczyste są tylko elementy odbiegające temperaturą od średniej. Rysunek 9 prezentuje odpowiednie pole ciśnienia.



Rysunek 8: Pole temperatury w przykładowym modelu. Kolor niebieski oznacza chłodniejszy ośrodek, kolor czerwony cieplejszy.



Rysunek 9: Pole ciśnienia przykładowego modelu. Kolor niebieski oznacza obniżone ciśnienie (poniżej średniej) kolor żółty i pomarańczowy podwyższone.

Łatwo zauważyć sprężenie następujące w miejscu zderzenia dwóch napływów. Rysunek 10 prezentuje przekrój przez pole prędkości w środku domeny obliczeniowej. Widoczne kierunki napływu pokrywają się z intuicjami. Warto zauważyć wzmożoną rotację na krawędzi strumienia spływu. Zawdzięczamy ją mechanizmowi dodawania siły zachowania rotacji, bez niej model byłby zupełnie płaski.



Rysunek 10: Pole prędkości przykładowego modelu.

8.2 Model 2 - tunel aerodynamiczny



Rysunek 11: Przekrój przez pole prędkości modelu tunelu aerodynamicznego.

Model 2 prezentuje bardzo prosty przykład tunelu aerodynamicznego, w którym umieszczony został podłużny prostokąt w poprzek ruchu ośrodka. W tym przypadku zastosowany został warunek brzegowy na prędkość, nie ma bowiem żadnych elementów grzejących, temperatura jest stała. Model SIMP oczywiście przewiduje różnorodne inicjowanie domeny obliczeniowej, warunki brzegowo mogą obejmować stałe niezmienne ciała umieszczone w domenie (zajęte voxele), jak i inicjalizację początkową dla wszelkich zmiennych pól. W przypadku tunelu aerodynamicznego zastosowany został warunek innego



Rysunek 12: Fragment rotacji pola prędkości. Widać że największe zawirowania tworzą się przy krawędzi obiektu w domenie.



Rysunek 13: Pole ciśnienia w tunelu aerodynamicznym. Widać przyrost ciśnienia przed przeszkodą i spadek za nią.

rodzaju - część voxeli ma ustalone i nie zmieniane w czasie symulacji składowe prędkości. Taka wymuszona prędkość przenoszona jest w modelu na dalsze voxele w dwojaki sposów - kiedy charakterystyka zatrzyma się w jednym z voxeli z wymuszoną składową, lub po odjęciu gradientu ciśnienia, który jest w tym miejscu wymuszony dywergencją. Takie voxele z wymuszoną prędkością nie są warunkami brzegowymi w sensie rozwiązania równania Poissona (te zawsze mają składowe prędkości równe zero).



Rysunek 14: Moduł pola prędkości. Widać dobrze gdzie ruch ośrodka jest przyspieszony, a gdzie spowolniony.

Literatura

- Ronald Fedkiw and Jos Stam and Henrik Wann Jensen, Visual Simulation of Smoke SIGGRAPH 2001, Computer Graphics Proceedings, ACM Press / ACM SIGGRAPH 2001
- [2] Jos Stam, *Stable Fluids*, Siggraph 1999, Computer Graphics Proceedings, Addison Wesley Longman 1999, strony 121-128.
- [3] M.M. Woolfson, G.J. Pert, An introduction to Computer Simulation Oxford University Press 1999.
- [4] J.Steinhoff i D.Underhill Modification of the Euler equations for "vorticity confinement" : Application to the computation of interacting vortex rings, Physics of Fluids 1994.
- [5] Andrzej Marciniak, Dorota Gregulec i Jan Kaczmarek, Procedury Numeryczne w języku Turbo Pascal, NAKOM 1997.