



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia



Sieci bezskalowe

Filip Piękniewski

Wydział Matematyki i Informatyki
UMK

Prezentacja na Seminarium Doktoranckie dostępna na
<http://www.mat.uni.torun.pl/~philip/sem-2008-2.pdf>

24 listopada 2008



1 Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie

- Model Erdős'a-Rényi
- Przejścia fazowe w modelu E-R
- Co jest nie tak z modelem E-R?

2 Grafy empiryczne

- Fenomen małego świata - sieci Small World
- Prawo potęgowe w rozkładach stopni
- Przykłady sieci z prawem potęgowym
- Kontrowersje związane z metodologią
- Co to jest sieć bezskalowa?

3 Wyniki teoretyczne

- Model Barabási-Albert
- Model General Random Graph - GRG
- Losowy graf z prawem potęgowym
- Własności uogólnionego grafu losowego
- Niezmienniczość prawa potęgowego

4 Krytyka dotychczasowych poglądów

- Problemy metodologiczne
- S-miara - jak bardzo bezskalowy jest graf?
- Cechy grafu s-max - "robust yet fragile"
- S-miara jako prawdopodobieństwo

5 Podsumowanie



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia

Model Erdős'a-Rényi
Przejścia fazowe w modelu E-R
Co jest nie tak z modelem E-R?



Grafy losowe, model Erdős'a-Rényi

- Ciekawym z punktu widzenia informatyki jest to jak wygląda przeciętny graf?
- Sformułowanie to wymaga określenia czym jest "przeciętny" graf!
- Oznacza to zdefiniowanie przestrzeni probabilistycznej, której elementami będą grafy, oraz zadania pewnej miary na tej przestrzeni.
- Jak to zrobić?



Grafy losowe, model Erdős'a-Rényi

- Łatwo zdefiniować przestrzeń wszystkich grafów n wierzchołkowych i zadać na niej miarę jednostajną (osobną kwestią jest problem losowania z tego rozkładu)
- Wszystkich grafów jest jednak nieskończenie wiele, podobnie jak liczb rzeczywistych, nie da się zatem zadawać na nich miary poprzez przypisanie każdemu grafowi skończonego prawdopodobieństwa...
- Możliwe są inne podejścia do stworzenia modelu grafu losowego, każdy jednak model może być inny bo...
- ... do końca nie wiemy czym jest graf losowy...
- w szczególności osobną kwestią jest to jak wygląda *przeciętny graf* spotykany w rzeczywistości



Grafy losowe, model Erdős'a-Rényi

- Podstawowym modelem grafu losowego był od lat model Erdős'a-Rényi [Erdős & Rényi, 1959, Erdős & Rényi, 1960]
- Zakłada on następującą drogę wylosowania grafu:
 - Ustalamy pewną liczbą $p \in (0, 1)$, wybieramy liczbą naturalną n (losowo)
 - Pomiędzy każdą z n^2 par wierzchołków dodajemy krawędź prawdopodobieństwem p
- Model E-R jest przyzwoicie losowy, a jednocześnie na tyle prosty, iż dało się go łatwo¹ zbadać

¹"łatwo" to prowokacja!



Grafy losowe, model Erdős'a-Rényi

- Łatwo sprawdzić, iż rozkład stopni wierzchołków w modelu E-R jest dwumianowy

$$P(\deg(v) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (1)$$

który zbiega do rozkładu Poissona przy $n \rightarrow \infty$
(prawdopodobieństwo, że stopień wierzchołka n -elementowego grafu jest ilością sukcesów w n niezależnych losowaniach krawędzi z prawdopodobieństwem sukcesu p).

- Warto też odnotować przejścia fazowe w grafach E-R które są obecnie dość dobrze badanym zjawiskiem.



Wielki komponent (giant component)

- Grafy losowe o niewielkiej ilości krawędzi są zazwyczaj rozłączną sumą drzew lub komponentów "unicyklicznych" (drzewo uzupełnione o jedną dodatkową krawędź)
- Rozmiary takich składowych są niewielkie, rzędu $\log(n)$
- Dla pewnej granicznej gęstości krawędzi pojawia się jednak spójna składowa o skomplikowanej strukturze, której rozmiar jest tego samego rzędu co rozmiar całego grafu.
- Taką składową nazywany "wielkim komponentem" z angielskiego "giant component" (sekcja 5.1 w [Chung & Lu, 2006])



Przejścia fazowe w grafach Erdős'a-Rényiego

- $p = o(1/n)$ graf jest (z olbrzymim prawdopodobieństwem) rozłączną sumą drzew.
- $p \approx \lambda/n$ dla $\lambda \in (0, 1)$ graf zawiera cykle dowolnej długości (w granicy). Wszystkie spójne składowe są albo drzewami albo drzewami uzupełnionymi do cyklu (unicykliczne składowe) o rozmiarze $O(\log n)$.
- $p = (1 + \varepsilon)/n$ nagle pojawia się wielki komponent. Dla $\varepsilon = 0$ (reżim krytyczny) największa składowa ma rozmiar $n^{2/3}$. Z prawdopodobieństwem 0.9325 (przy $n \rightarrow \infty$) graf składa się drzew, cykli i podwójnych cykli. Z prawdopodobieństwem 0.9957 graf składa się z drzew, cykli i co najwyżej jednej dodatkowej składowej spójnej. Z prawdopodobieństwem 0.987-0.9998 graf jest planarny. Dla $\varepsilon > 0$ większość składowych łączy się w wielki komponent o rozmiarze αn gdzie $\varepsilon = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - \alpha) - 1$.



Przejścia fazowe w grafach Erdős'a-Rényiego

- $p = o(1/n)$ graf jest (z olbrzymim prawdopodobieństwem) rozłączną sumą drzew.
- $p \approx \lambda/n$ dla $\lambda \in (0, 1)$ graf zawiera cykle dowolnej długości (w granicy). Wszystkie spójne składowe są albo drzewami albo drzewami uzupełnionymi do cyklu (unicykliczne składowe) o rozmiarze $O(\log n)$.
- $p = (1 + \varepsilon)/n$ nagle pojawia się wielki komponent. Dla $\varepsilon = 0$ (reżim krytyczny) największa składowa ma rozmiar $n^{2/3}$. Z prawdopodobieństwem 0.9325 (przy $n \rightarrow \infty$) graf składa się z drzew, cykli i podwójnych cykli. Z prawdopodobieństwem 0.9957 graf składa się z drzew, cykli i co najwyżej jednej dodatkowej składowej spójnej. Z prawdopodobieństwem 0.987-0.9998 graf jest planarny. Dla $\varepsilon > 0$ większość składowych łączy się w wielki komponent o rozmiarze αn gdzie $\varepsilon = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - \alpha) - 1$.



Przejścia fazowe w grafach Erdős'a-Rényiego

- $p = o(1/n)$ graf jest (z olbrzymim prawdopodobieństwem) rozłączną sumą drzew.
- $p \approx \lambda/n$ dla $\lambda \in (0, 1)$ graf zawiera cykle dowolnej długości (w granicy). Wszystkie spójne składowe są albo drzewami albo drzewami uzupełnionymi do cyklu (unicykliczne składowe) o rozmiarze $O(\log n)$.
- $p = (1 + \varepsilon)/n$ nagle pojawia się wielki komponent. Dla $\varepsilon = 0$ (reżim krytyczny) największa składowa ma rozmiar $n^{2/3}$. Z prawdopodobieństwem 0.9325 (przy $n \rightarrow \infty$) graf składa się z drzew, cykli i podwójnych cykli. Z prawdopodobieństwem 0.9957 graf składa się z drzew, cykli i co najwyżej jednej dodatkowej składowej spójnej. Z prawdopodobieństwem 0.987-0.9998 graf jest planarny. Dla $\varepsilon > 0$ większość składowych łączy się w wielki komponent o rozmiarze αn gdzie $\varepsilon = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - \alpha) - 1$.



Przejścia fazowe w grafach Erdős'a-Rényiego

- $p = \lambda/n$ dla $\lambda > 1$ oprócz wielkiego komponentu wszystkie inne składowe mają logarytmiczne rozmiary. Większość z nich to drzewa, ale składowe z jednym cyklem również są obecne.
- $p = \lambda \log(n)/n$ dla $\lambda > 1$ w miarę jak $n \rightarrow \infty$ graf prawie na pewno jest spójny.
- $p = \omega(n) \log(n)/n$ gdzie $\omega(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ graf jest prawie na pewno spójny oraz stopnie wszystkich wierzchołków są asymptotycznie równe.



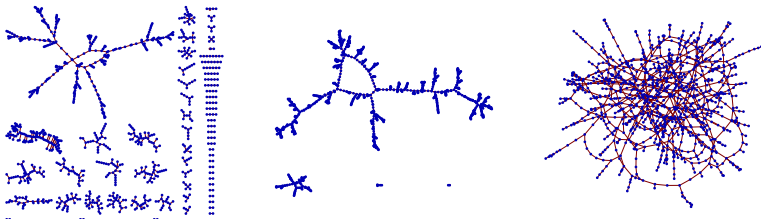
Przejścia fazowe w grafach Erdős'a-Rényiego

- $p = \lambda/n$ dla $\lambda > 1$ oprócz wielkiego komponentu wszystkie inne składowe mają logarytmiczne rozmiary. Większość z nich to drzewa, ale składowe z jednym cyklem również są obecne.
- $p = \lambda \log(n)/n$ dla $\lambda > 1$ w miarę jak $n \rightarrow \infty$ graf prawie na pewno jest spójny.
- $p = \omega(n) \log(n)/n$ gdzie $\omega(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ graf jest prawie na pewno spójny oraz stopnie wszystkich wierzchołków są asymptotycznie równe.

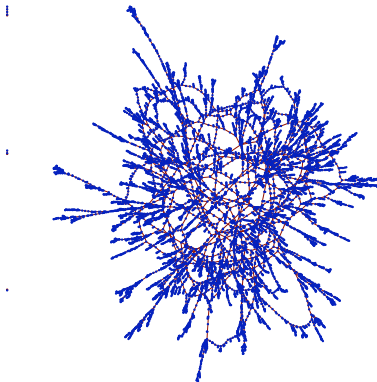


Przejścia fazowe w grafach Erdős'a-Rényiego

- $p = \lambda/n$ dla $\lambda > 1$ oprócz wielkiego komponentu wszystkie inne składowe mają logarytmiczne rozmiary. Większość z nich to drzewa, ale składowe z jednym cyklem również są obecne.
- $p = \lambda \log(n)/n$ dla $\lambda > 1$ w miarę jak $n \rightarrow \infty$ graf prawie na pewno jest spójny.
- $p = \omega(n) \log(n)/n$ gdzie $\omega(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ graf jest prawie na pewno spójny oraz stopnie wszystkich wierzchołków są asymptotycznie równe.



Rysunek: Przejście fazowe na przykładowym grafie Erdős'a-Rényi o 1000 wierzchołków. Prawdopodobieństwa wylosowania krawędzi $p = 0.9/1000, 1/1000, 1.1/1000$ odpowiednio od lewej do prawej. Zgodnie z przewidywaniami poniżej krytycznej wartości graf składa się z niewielkich drzew, w punkcie krytycznym pojawia się wielki komponent natomiast ilość rozłącznych składowych gwałtownie spada. Nieco powyżej punktu krytycznego graf jest praktycznie spójny.



Rysunek: Przykładowy graf Erdősa-Rényi o 10000 wierzchołków niewiele powyżej prawdopodobieństwa krytycznego. Widoczna jest wielka składowa i kilka niewielkich komponentów.



- Model E-R ma jednak pewne wady które powodują, że nie nadaje się do symulowania grafów empirycznych
- Po pierwsze, grafy E-R nie przejawiają struktury lokalnej, nie posiadają dobrze zdefiniowanych ośrodków i skupisk
- Grafy empiryczne nie przejawiają rozkładu dwumianowego w histogramach stopni wierzchołków...
- Grafy empiryczne są rzadkie, często na tyle rzadkie, że odpowiadający graf E-R nie jest nawet spójny



Model Small World Network (Watts-Strogatz)

- Grafy empiryczne mają często dość dziwne cechy. Pomimo iż znaczna większość połączeń jest lokalnych (graf dziedziczy pewną strukturę odległości), to średnia długość drogi liczona w ilości krawędzi między dowolną parą wierzchołków jest bardzo niewielka, znacznie mniejsza niż w pełni lokalnym grafie
- Własność ta została zaobserwowana przez socjologów w strukturze znajomości w społeczeństwie ludzkim, nosi nazwę fenomenu sześciu uścisków dłoni [Travers & Milgram, 1969]
- Okazuje się, że przeciętnie pomiędzy dowolnymi dwoma osobami na świecie istnieje łańcuch sześciu osób które uścisnęły sobie dłonie

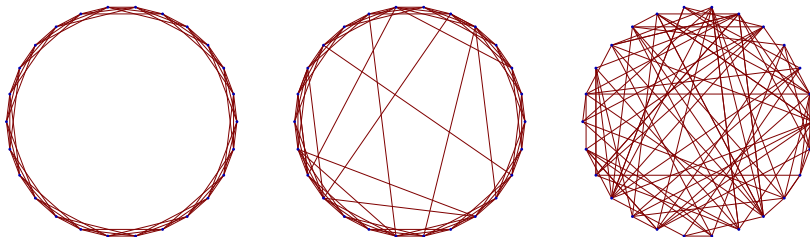


Model Small World Network (Watts-Strogatz)

- W 1998 roku Watts i Strogatz [Watts & Strogatz, 1998] zauważyli, iż pewien bardzo prosty proces losowy prowadzi do powstania dobrze zlokalizowanych sieci z niewielką średnią odległością między wierzchołkami
- Model sprowadza się do następującego algorytmu:
 - Zaczynij od zlokalizowanej sieci, np. kraty lub pierścienia w którym każdy wierzchołek połączony jest z kilkoma najbliższymi sąsiadami
 - Następnie losowo pozamieniaj wierzchołki startowe pewnej ilości krawędzi
- Jak się okazuje, wystarczy zaingerować w kilka procent krawędzi, aby średnia odległość dramatycznie spadła, przy zachowaniu "lokalności"



Model Small World Network (Watts-Strogatz)



Rysunek: Od grafu zlokalizowanego (po lewo) do grafu losowego (prawo).
Sieci małego świata są blisko grafów lokalnych, jednak niewielka ilość losowych połączeń istotnie skraca średnią drogę między wierzchołkami.



Prawa potęgowe w rozkładach stopni wierzchołków

- Kolejną cechą sieci empirycznych która wraz z rozwojem badań komputerowych zaczęła się wyłaniać to prawa potęgowe w rozkładach stopni wierzchołków
- Innymi słowy przeciętnie ilość wierzchołków stopnia k jest proporcjonalna do $k^{-\gamma}$ dla pewnego γ
- Prawa potęgowe w wielu miejscach były znane już wcześniej dużo wcześniej. [Lotka, 1926] odkrył prawo potęgowe w ilości cytowań w indeksie abstraktów chemicznych. [Zipf, 1932] badał częstości występowania słów w języku angielskim (prawo Zipfa). [Simon, 1955] badał prawa potęgowe w wielu dziedzinach, między innymi rozkładzie rozmiarów miast amerykańskich itp.



Prawa potęgowe w rozkładach stopni wierzchołków

- Kolejną cechą sieci empirycznych która wraz z rozwojem badań komputerowych zaczęła się wyłaniać to prawa potęgowe w rozkładach stopni wierzchołków
- Innymi słowy przeciętnie ilość wierzchołków stopnia k jest proporcjonalna do $k^{-\gamma}$ dla pewnego γ
- Prawa potęgowe w wielu miejscach były znane już wcześniej dużo wcześniej. [Lotka, 1926] odkrył prawo potęgowe w ilości cytowań w indeksie abstraktów chemicznych. [Zipf, 1932] badał częstości występowania słów w języku angielskim (prawo Zipfa). [Simon, 1955] badał prawa potęgowe w wielu dziedzinach, między innymi rozkładzie rozmiarów miast amerykańskich itp.



Prawa potęgowe w rozkładach stopni wierzchołków

- Kolejną cechą sieci empirycznych która wraz z rozwojem badań komputerowych zaczęła się wyłaniać to prawa potęgowe w rozkładach stopni wierzchołków
- Innymi słowy przeciętnie ilość wierzchołków stopnia k jest proporcjonalna do $k^{-\gamma}$ dla pewnego γ
- Prawa potęgowe w wielu miejscach były znane już wcześniej dużo wcześniej. [Lotka, 1926] odkrył prawo potęgowe w ilości cytowań w indeksie abstraktów chemicznych. [Zipf, 1932] badał częstości występowania słów w języku angielskim (prawo Zipfa). [Simon, 1955] badał prawa potęgowe w wielu dziedzinach, między innymi rozkładzie rozmiarów miast amerykańskich itp.



Sieci empiryczne

Do tej pory odkryto iż wiele sieci empirycznych spełnia prawo potęgowe w rozkładzie stopni wierzchołków:

- WWW [Albert *et al.* , 1999],
- Internet na poziomie routerów
[Albert *et al.* , 2000, Faloutsos *et al.* , 1999],
- Sieć współpracy naukowej i artystycznej
[Barabási *et al.* , 2002, Barabási & Albert, 1999],
- Sieć cytowań [Redner, 1998],
- Sieci ekologiczne [Montoya & V., 2002],
- Sieci lingwistyczne [i Cancho & Solé, 2001]
- Sieci metabolizmu [Bhalla & Iyengar, 1999, Jeong *et al.* , 2000]
- Sieci połączeń telefonicznych
[Abello *et al.* , 1998, Aiello *et al.* , 2000]
- I wiele innych [Albert & Barabási, 2002].



Kontrowersje

W pracy [Li *et al.* , 2005] autorzy wskazują na liczne błędy metodologiczne popełniane przy badaniu struktur grafu.

- Zależność między gęstością a dystrybuantą rozkładu dotyczy rozkładów ciągłych, przy dyskretnych próbkach gęstość nie jest dobrze zdefiniowana.
- Wielu badaczy przyjmuje pojawienie się linii prostej na wykresie log-log częstotliwości występowania danych obiektów jako nieomylną oznakę prawa potęgowego. Może to jednak być zdradliwe, ze względu na grupowanie przy zliczaniu histogramów.
- Z tego względu należy raczej patrzeć na dystrybuantę empiryczną, która prezentuje oryginalne dane (bez grupowania) i jest bardziej stabilna. Tam wyniki pewnych obserwacji mogą być zupełnie inne!



Kontrowersje

W pracy [Li *et al.* , 2005] autorzy wskazują na liczne błędy metodologiczne popełniane przy badaniu struktur grafu.

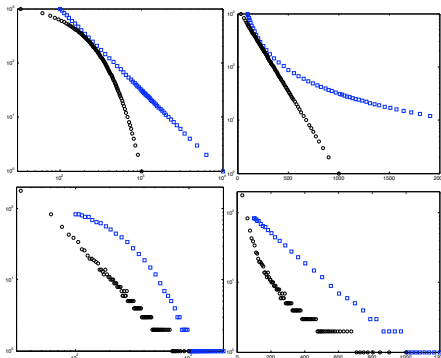
- Zależność między gęstością a dystrybuantą rozkładu dotyczy rozkładów ciągłych, przy dyskretnych próbkach gęstość nie jest dobrze zdefiniowana.
- Wielu badaczy przyjmuje pojawienie się linii prostej na wykresie log-log częstotliwości występowania danych obiektów jako nieomylną oznakę prawa potęgowego. Może to jednak być zdradliwe, ze względu na grupowanie przy zliczaniu histogramów.
- Z tego względu należy raczej patrzeć na dystrybuantę empiryczną, która prezentuje oryginalne dane (bez grupowania) i jest bardziej stabilna. Tam wyniki pewnych obserwacji mogą być zupełnie inne!



Kontrowersje

W pracy [Li *et al.* , 2005] autorzy wskazują na liczne błędy metodologiczne popełniane przy badaniu struktur grafu.

- Zależność między gęstością a dystrybuantą rozkładu dotyczy rozkładów ciągłych, przy dyskretnych próbkach gęstość nie jest dobrze zdefiniowana.
- Wielu badaczy przyjmuje pojawienie się linii prostej na wykresie log-log częstotliwości występowania danych obiektów jako nieomylną oznakę prawa potęgowego. Może to jednak być zdradliwe, ze względu na grupowanie przy zliczaniu histogramów.
- Z tego względu należy raczej patrzeć na dystrybuantę empiryczną, która prezentuje oryginalne dane (bez grupowania) i jest bardziej stabilna. Tam wyniki pewnych obserwacji mogą być zupełnie inne!



Rysunek: Złośliwie wygenerowane dane [Li *et al.* , 2005]. Niebieskie pochodzą z rozkładu potęgowego, czarne z wykładniczego (górne wykresy prezentują dane kumulacyjne). Dwa dolne wykresy prezentują wykresy częstotliwości występowania elementów (histogramy), w których błędnie wynika, że czarne dane spełniają prawo potęgowe, niebieskie zaś zdają się być wykładnicze.



Czym zatem jest sieć bezskalowa?

Barabási i Albert w swojej pracy użyli sformułowania: "*a common property of many large networks is that the vertex connectivities follow a scale-free power-law distribution*". Istotnie prawo potęgowe jest niezmiennikiem skali układu stąd pojawiło się pojęcie bezskalowości. Jednak w wielu innych pracach zaczęły się pojawiać własności przypisywane sieciom bezskalowym, które nie koniecznie mają coś wspólnego z rozkładem stopni wierzchołków:

- Sieci bezskalowe mają silnie połączone "huby" które są krytyczne dla łączności sieci, w związku z tym są podatne na celowany atak (pięta Achillesowa Internetu - [\[Albert *et al.* , 2000\]](#))
- Sieci bezskalowe są samopodobne



Model Barabási-Albert

W 1999 roku [Barabási & Albert, 1999] zaproponowali model oparty o dwie zasady: przyrost i preferencyjne dołączanie (preferential attachment). Ich model wygląda następująco:

- Rozpocznij proces od pewnego niewielkiego zbioru wierzchołków (zazwyczaj jednego).
- W każdym kroku dodaj jeden wierzchołek i dołącz do już istniejących dając preferencje tym którzy już mają dobrą łączność (prawdopodobieństwo dodania krawędzi do wierzchołka v jest proporcjonalne do aktualnego stopnia d_v). Ilość dodawanych w każdym kroku krawędzi jest parametrem modelu m .

Taki mechanizm prowadzi do powstania sieci, której rozkład stopni wierzchołków spełnia prawo potęgowe z wykładnikiem $\gamma = 3$.



Argumentacja:

- Zauważmy, że wierzchołki o wysokim stopniu zdobywają krawędzie szybciej niż inne. W kroku t wierzchołek i o stopniu k_i zdobywa w przybliżeniu:

$$\frac{k_i}{\sum_j k_j} \cdot m = \frac{k_i}{2 \cdot m \cdot t} \cdot m = \frac{k_i}{2t} \quad (2)$$

krawędzi.

- Traktując k_i jako funkcję ciągłą mamy

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad (3)$$

Rozwiązując ze względu na t dostajemy $k_i(t) = m\sqrt{t/t_i}$ gdzie t_i oznacza moment w którym wierzchołek i został dodany do sieci.



Argumentacja:

- Zauważmy, że wierzchołki o wysokim stopniu zdobywają krawędzie szybciej niż inne. W kroku t wierzchołek i o stopniu k_i zdobywa w przybliżeniu:

$$\frac{k_i}{\sum_j k_j} \cdot m = \frac{k_i}{2 \cdot m \cdot t} \cdot m = \frac{k_i}{2t} \quad (2)$$

krawędzi.

- Traktując k_i jako funkcję ciągłą mamy

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad (3)$$

Rozwiązując ze względu na t dostajemy $k_i(t) = m\sqrt{t/t_i}$ gdzie t_i oznacza moment w którym wierzchołek i został dodany do sieci.



Argumentacja:

- Zauważmy, że wierzchołki o wysokim stopniu zdobywają krawędzie szybciej niż inne. W kroku t wierzchołek i o stopniu k_i zdobywa w przybliżeniu:

$$\frac{k_i}{\sum_j k_j} \cdot m = \frac{k_i}{2 \cdot m \cdot t} \cdot m = \frac{k_i}{2t} \quad (2)$$

krawędzi.

- Traktując k_i jako funkcję ciągłą mamy

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad (3)$$

Rozwiązując ze względu na t dostajemy $k_i(t) = m\sqrt{t/t_i}$ gdzie t_i oznacza moment w którym wierzchołek i został dodany do sieci.



Argumentacja:

- Zauważmy, że wierzchołki o wysokim stopniu zdobywają krawędzie szybciej niż inne. W kroku t wierzchołek i o stopniu k_i zdobywa w przybliżeniu:

$$\frac{k_i}{\sum_j k_j} \cdot m = \frac{k_i}{2 \cdot m \cdot t} \cdot m = \frac{k_i}{2t} \quad (2)$$

krawędzi.

- Traktując k_i jako funkcję ciągłą mamy

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} = \frac{k_i}{2t} \quad (3)$$

Rozwiązując ze względu na t dostajemy $k_i(t) = m\sqrt{t/t_i}$ gdzie t_i oznacza moment w którym wierzchołek i został dodany do sieci.



- Możemy oszacować prawdopodobieństwo, że wierzchołek i ma mniej niż k sąsiadów:

$$P(k_i < k) = P(t_i > m^2 t / k^2) \quad (4)$$

(ilość sąsiadów zależy wyłącznie od czasu w którym wierzchołek został dodany do sieci)

- Zakładając, że wierzchołki są dodawane do sieci jednostajnie mamy:

$$P(t_i > m^2 t / k^2) = 1 - P(t_i \leq m^2 t / k^2) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)} \quad (5)$$

gdzie m_0 jest początkową ilością wierzchołków (e.g. $m_0 = 1$).
Dla dużych grafów $t/(t + m_0) \approx 1$.



- Możemy oszacować prawdopodobieństwo, że wierzchołek i ma mniej niż k sąsiadów:

$$P(k_i < k) = P(t_i > m^2 t / k^2) \quad (4)$$

(ilość sąsiadów zależy wyłącznie od czasu w którym wierzchołek został dodany do sieci)

- Zakładając, że wierzchołki są dodawane do sieci jednostajnie mamy:

$$P(t_i > m^2 t / k^2) = 1 - P(t_i \leq m^2 t / k^2) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)} \quad (5)$$

gdzie m_0 jest początkową ilością wierzchołków (e.g. $m_0 = 1$).
Dla dużych grafów $t/(t + m_0) \approx 1$.



- Możemy oszacować prawdopodobieństwo, że wierzchołek i ma mniej niż k sąsiadów:

$$P(k_i < k) = P(t_i > m^2 t / k^2) \quad (4)$$

(ilość sąsiadów zależy wyłącznie od czasu w którym wierzchołek został dodany do sieci)

- Zakładając, że wierzchołki są dodawane do sieci jednostajnie mamy:

$$P(t_i > m^2 t / k^2) = 1 - P(t_i \leq m^2 t / k^2) = 1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)} \quad (5)$$

gdzie m_0 jest początkową ilością wierzchołków (e.g. $m_0 = 1$).
Dla dużych grafów $t/(t + m_0) \approx 1$.



- Aby otrzymać gęstość prawdopodobieństwa różniczkujemy dystrybuantę:

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left(1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)} \right) \quad (6)$$

- Ostatecznie mamy:

$$P(k) \approx \frac{2m^2}{k^3} \quad (7)$$

zatem $\gamma = 3$ i jest niezależna od m i t .



- Aby otrzymać gęstość prawdopodobieństwa różniczkujemy dystrybuantę:

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left(1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)} \right) \quad (6)$$

- Ostatecznie mamy:

$$P(k) \approx \frac{2m^2}{k^3} \quad (7)$$

zatem $\gamma = 3$ i jest niezależna od m i t .



- Aby otrzymać gęstość prawdopodobieństwa różniczkujemy dystrybuantę:

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left(1 - \frac{m^2 t}{k^2(t + m_0)} \right) \quad (6)$$

- Ostatecznie mamy:

$$P(k) \approx \frac{2m^2}{k^3} \quad (7)$$

zatem $\gamma = 3$ i jest niezależna od m i t .



Model General Random Graph - GRG

- Model Barabási-Albert jest prosty w symulowaniu jednak ze względu na swój przyrost całkowicie nie pasuje do narzędzi probabilistycznych rozwiniętych przy badaniu modelu Erdős-a-Rényi
- Tutaj bardziej przydatny okazał się generalny model grafu losowego (GRG) w którym możemy zadać przestrzeń probabilistyczną grafów poprzez podanie oczekiwanego rozkładu wierzchołków.
- Podobnie jak w przypadku modelu Erdős-a-Rényi taka przestrzeń rozpięta jest na zbiorze wszystkich grafów n wierzchołkowych, miara jednak jest skupiona wokół grafów o rozkładzie stopni zbliżonym do danego.



Model General Random Graph - GRG

- Model Barabási-Albert jest prosty w symulowaniu jednak ze względu na swój przyrost całkowicie nie pasuje do narzędzi probabilistycznych rozwiniętych przy badaniu modelu Erdős-a-Rényi
- Tutaj bardziej przydatny okazał się generalny model grafu losowego (GRG) w którym możemy zadać przestrzeń probabilistyczną grafów poprzez podanie oczekiwanego rozkładu wierzchołków.
- Podobnie jak w przypadku modelu Erdős-a-Rényi taka przestrzeń rozpięta jest na zbiorze wszystkich grafów n wierzchołkowych, miara jednak jest skupiona wokół grafów o rozkładzie stopni zbliżonym do danego.



Model General Random Graph - GRG

- Model Barabási-Albert jest prosty w symulowaniu jednak ze względu na swój przyrost całkowicie nie pasuje do narzędzi probabilistycznych rozwiniętych przy badaniu modelu Erdős-a-Rényi
- Tutaj bardziej przydatny okazał się generalny model grafu losowego (GRG) w którym możemy zadać przestrzeń probabilistyczną grafów poprzez podanie oczekiwanego rozkładu wierzchołków.
- Podobnie jak w przypadku modelu Erdős-a-Rényi taka przestrzeń rozpięta jest na zbiorze wszystkich grafów n wierzchołkowych, miara jednak jest skupiona wokół grafów o rozkładzie stopni zbliżonym do danego.



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ - oczekiwany rozkład stopni wierzchołków (wektor) parametr modelu
- $w = \frac{\sum w_i}{n}$ - średni oczekiwany rozkład stopni wierzchołków modelu
- $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$ - średnia drugiego rzędu oczekiwanego stopnia wierzchołka
- $G(\mathbf{w})$ - przestrzeń probabilistyczna grafów o oczekiwanym rozkładzie stopni $\mathbf{w}$
- $G \in G(\mathbf{w})$ instancja grafu wylosowanego z $G(\mathbf{w})$
- d_i - faktyczny stopień wierzchołka i w instancji G
- $d = \frac{\sum d_i}{n}$ faktyczna średnia stopni wierzchołków w instancji G



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ - oczekiwany rozkład stopni wierzchołków (wektor) parametr modelu
- $w = \frac{\sum w_i}{n}$ - średni oczekiwany rozkład stopni wierzchołków modelu
- $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$ - średnia drugiego rzędu oczekiwanego stopnia wierzchołka
- $G(\mathbf{w})$ - przestrzeń probabilistyczna grafów o oczekiwanym rozkładzie stopni $\mathbf{w}$
- $G \in G(\mathbf{w})$ instancja grafu wylosowanego z $G(\mathbf{w})$
- d_i - faktyczny stopień wierzchołka i w instancji G
- $d = \frac{\sum d_i}{n}$ faktyczna średnia stopni wierzchołków w instancji G



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ - oczekiwany rozkład stopni wierzchołków (wektor) parametr modelu
- $w = \frac{\sum w_i}{n}$ - średni oczekiwany rozkład stopni wierzchołków modelu
- $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$ - średnia drugiego rzędu oczekiwanego stopnia wierzchołka
- $G(\mathbf{w})$ - przestrzeń probabilistyczna grafów o oczekiwanym rozkładzie stopni $\mathbf{w}$
- $G \in G(\mathbf{w})$ instancja grafu wylosowanego z $G(\mathbf{w})$
- d_i - faktyczny stopień wierzchołka i w instancji G
- $d = \frac{\sum d_i}{n}$ faktyczna średnia stopni wierzchołków w instancji G



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ - oczekiwany rozkład stopni wierzchołków (wektor) parametr modelu
- $w = \frac{\sum w_i}{n}$ - średni oczekiwany rozkład stopni wierzchołków modelu
- $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$ - średnia drugiego rzędu oczekiwanego stopnia wierzchołka
- $G(\mathbf{w})$ - przestrzeń probabilistyczna grafów o oczekiwanym rozkładzie stopni $\mathbf{w}$
- $G \in G(\mathbf{w})$ instancja grafu wylosowanego z $G(\mathbf{w})$
- d_i - faktyczny stopień wierzchołka i w instancji G
- $d = \frac{\sum d_i}{n}$ faktyczna średnia stopni wierzchołków w instancji G



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ - oczekiwany rozkład stopni wierzchołków (wektor) parametr modelu
- $w = \frac{\sum w_i}{n}$ - średni oczekiwany rozkład stopni wierzchołków modelu
- $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$ - średnia drugiego rzędu oczekiwanego stopnia wierzchołka
- $G(\mathbf{w})$ - przestrzeń probabilistyczna grafów o oczekiwanym rozkładzie stopni $\mathbf{w}$
- $G \in G(\mathbf{w})$ instancja grafu wylosowanego z $G(\mathbf{w})$
- d_i - faktyczny stopień wierzchołka i w instancji G
- $d = \frac{\sum d_i}{n}$ faktyczna średnia stopni wierzchołków w instancji G



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ - oczekiwany rozkład stopni wierzchołków (wektor) parametr modelu
- $w = \frac{\sum w_i}{n}$ - średni oczekiwany rozkład stopni wierzchołków modelu
- $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$ - średnia drugiego rzędu oczekiwanego stopnia wierzchołka
- $G(\mathbf{w})$ - przestrzeń probabilistyczna grafów o oczekiwanym rozkładzie stopni $\mathbf{w}$
- $G \in G(\mathbf{w})$ instancja grafu wylosowanego z $G(\mathbf{w})$
- d_i - faktyczny stopień wierzchołka i w instancji G
- $d = \frac{\sum d_i}{n}$ faktyczna średnia stopni wierzchołków w instancji G



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ - oczekiwany rozkład stopni wierzchołków (wektor) parametr modelu
- $w = \frac{\sum w_i}{n}$ - średni oczekiwany rozkład stopni wierzchołków modelu
- $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$ - średnia drugiego rzędu oczekiwanego stopnia wierzchołka
- $G(\mathbf{w})$ - przestrzeń probabilistyczna grafów o oczekiwanym rozkładzie stopni $\mathbf{w}$
- $G \in G(\mathbf{w})$ instancja grafu wylosowanego z $G(\mathbf{w})$
- d_i - faktyczny stopień wierzchołka i w instancji G
- $d = \frac{\sum d_i}{n}$ faktyczna średnia stopni wierzchołków w instancji G



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\tilde{d} = \frac{\sum d_i^2}{\sum d_i} = \frac{\sum d_i^2}{d}$ - faktyczna średnia drugiego rzędu stopnia wierzchołka w instancji G
- $vol(S) = \sum_{x \in S} d_x$ - objętość (volume) zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol(S) = \sum_{x \in S} w_x$ - oczekiwana objętość zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$
- $vol_2(S) = \sum_{x \in S} d_x^2$ - objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol_2(S) = \sum_{x \in S} w_x^2$ - oczekiwana objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\tilde{d} = \frac{\sum d_i^2}{\sum d_i} = \frac{\sum d_i^2}{d}$ - faktyczna średnia drugiego rzędu stopnia wierzchołka w instancji G
- $vol(S) = \sum_{x \in S} d_x$ - objętość (volume) zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol(S) = \sum_{x \in S} w_x$ - oczekiwana objętość zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$
- $vol_2(S) = \sum_{x \in S} d_x^2$ - objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol_2(S) = \sum_{x \in S} w_x^2$ - oczekiwana objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\tilde{d} = \frac{\sum d_i^2}{\sum d_i} = \frac{\sum d_i^2}{d}$ - faktyczna średnia drugiego rzędu stopnia wierzchołka w instancji G
- $vol(S) = \sum_{x \in S} d_x$ - objętość (volume) zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol(S) = \sum_{x \in S} w_x$ - oczekiwana objętość zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$
- $vol_2(S) = \sum_{x \in S} d_x^2$ - objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol_2(S) = \sum_{x \in S} w_x^2$ - oczekiwana objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\tilde{d} = \frac{\sum d_i^2}{\sum d_i} = \frac{\sum d_i^2}{d}$ - faktyczna średnia drugiego rzędu stopnia wierzchołka w instancji G
- $vol(S) = \sum_{x \in S} d_x$ - objętość (volume) zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol(S) = \sum_{x \in S} w_x$ - oczekiwana objętość zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$
- $vol_2(S) = \sum_{x \in S} d_x^2$ - objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol_2(S) = \sum_{x \in S} w_x^2$ - oczekiwana objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$



Model General Random Graph - Oznaczenia

- $\tilde{d} = \frac{\sum d_i^2}{\sum d_i} = \frac{\sum d_i^2}{d}$ - faktyczna średnia drugiego rzędu stopnia wierzchołka w instancji G
- $vol(S) = \sum_{x \in S} d_x$ - objętość (volume) zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol(S) = \sum_{x \in S} w_x$ - oczekiwana objętość zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$
- $vol_2(S) = \sum_{x \in S} d_x^2$ - objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w instancji G
- $Vol_2(S) = \sum_{x \in S} w_x^2$ - oczekiwana objętość drugiego rzędu zbioru S wierzchołków w $G(\mathbf{w})$



Jak wylosować graf z $G(w)$?

- Każdej krawędzi z i do j przypisujemy prawdopodobieństwo sw_iw_j (zakładamy, że graf jest nieskierowany) gdzie $s = \frac{1}{\sum_i w_i}$
- Wybieramy krawędzie z odpowiednimi prawdopodobieństwami, otrzymujemy instancję G
- Zgodnie z przewidywaniami oczekiwany stopień wierzchołka i wynosi:

$$\sum_{j=1}^n sw_iw_j = 1 / \left(\sum_{j=1}^n w_j \right) \cdot \sum_{j=1}^n w_iw_j = w_i \quad (8)$$

- Aby to wszystko działało trzeba założyć
 $w_{\max}^2 = \max_i w_i^2 < \sum_k w_k$



Jak wylosować graf z $G(\mathbf{w})$?

- Każdej krawędzi z i do j przypisujemy prawdopodobieństwo sw_iw_j (zakładamy, że graf jest nieskierowany) gdzie $s = \frac{1}{\sum_i w_i}$
- Wybieramy krawędzie z odpowiednimi prawdopodobieństwami, otrzymujemy instancję G
- Zgodnie z przewidywaniami oczekiwany stopień wierzchołka i wynosi:

$$\sum_{j=1}^n sw_iw_j = 1 / \left(\sum_{j=1}^n w_j \right) \cdot \sum_{j=1}^n w_iw_j = w_i \quad (8)$$

- Aby to wszystko działało trzeba założyć
 $w_{\max}^2 = \max_i w_i^2 < \sum_k w_k$



Jak wylosować graf z $G(w)$?

- Każdej krawędzi z i do j przypisujemy prawdopodobieństwo sw_iw_j (zakładamy, że graf jest nieskierowany) gdzie $s = \frac{1}{\sum_i w_i}$
- Wybieramy krawędzie z odpowiednimi prawdopodobieństwami, otrzymujemy instancję G
- Zgodnie z przewidywaniami oczekiwany stopień wierzchołka i wynosi:

$$\sum_{j=1}^n sw_iw_j = 1 / \left(\sum_{j=1}^n w_j \right) \cdot \sum_{j=1}^n w_iw_j = w_i \quad (8)$$

- Aby to wszystko działało trzeba założyć

$$w_{\max}^2 = \max_i w_i^2 < \sum_k w_k$$



Podstawowe własności GRG

- $G(\mathbf{w})$ w którym $\mathbf{w} = (pn, pn, \dots, pn)$ odpowiada dokładnie modelowi Erdős'a-Rényiego dla prawdopodobieństwa krawędzi p .

$$\tilde{w} = \frac{Vol_2(G)}{Vol(G)} \text{ oraz } \tilde{d} = \frac{vol_2(G)}{vol(G)} \quad (9)$$

- Kładąc

$$\tilde{d}_k = \frac{\sum_{l \sim k} d_l}{d_k} \quad (10)$$

możemy zauważyć, że ważona suma:

$$\frac{\sum_k d_k \tilde{d}_k}{\sum_l d_l} = \frac{\sum_l \sum_{k \sim l} d_k}{vol(G)} = \frac{vol_2(G)}{vol(G)} = \tilde{d} \quad (11)$$



Podstawowe własności GRG

- $G(\mathbf{w})$ w którym $\mathbf{w} = (pn, pn, \dots, pn)$ odpowiada dokładnie modelowi Erdős'a-Rényiego dla prawdopodobieństwa krawędzi p .

•

$$\tilde{w} = \frac{Vol_2(G)}{Vol(G)} \text{ oraz } \tilde{d} = \frac{vol_2(G)}{vol(G)} \quad (9)$$

- Kładąc

$$\tilde{d}_k = \frac{\sum_{l \sim k} d_l}{d_k} \quad (10)$$

możemy zauważyć, że ważona suma:

$$\frac{\sum_k d_k \tilde{d}_k}{\sum_l d_l} = \frac{\sum_l \sum_{k \sim l} d_k}{vol(G)} = \frac{vol_2(G)}{vol(G)} = \tilde{d} \quad (11)$$



Podstawowe własności GRG

- $G(\mathbf{w})$ w którym $\mathbf{w} = (pn, pn, \dots, pn)$ odpowiada dokładnie modelowi Erdős'a-Rényiego dla prawdopodobieństwa krawędzi p .

•

$$\tilde{w} = \frac{Vol_2(G)}{Vol(G)} \text{ oraz } \tilde{d} = \frac{vol_2(G)}{vol(G)} \quad (9)$$

- Kładąc

$$\tilde{d}_k = \frac{\sum_{l \sim k} d_l}{d_k} \quad (10)$$

możemy zauważyć, że ważona suma:

$$\frac{\sum_k d_k \tilde{d}_k}{\sum_l d_l} = \frac{\sum_l \sum_{k \sim l} d_k}{vol(G)} = \frac{vol_2(G)}{vol(G)} = \tilde{d} \quad (11)$$



Losowy graf z prawem potęgowym

- Możemy wykorzystać model GRG do generowania losowego grafu o spodziewanym rozkładzie wierzchołków spełniającym prawo potęgowe z wykładnikiem γ .
- Zauważmy, iż wtedy liczba y wierzchołków o stopniu x spełnia równanie:

$$\log y = \alpha - \gamma \log x \quad (12)$$

dla pewnego α . Innymi słowy

$$|\{v | \deg(v) = x\}| \approx y = \frac{e^\alpha}{x^\gamma} \quad (13)$$

- Jak dobrze zadać $\mathbf{w}$?



- Zauważmy, że maksymalny stopień grafu wynosi co najwyżej $e^{\frac{\alpha}{\gamma}}$ bo $0 \leq \log y = \alpha - \gamma \log x$.
- Ilość wierzchołków w docelowym grafie można obliczyć następująco:

$$n = \sum_{x=1}^{e^{\frac{\alpha}{\gamma}}} \frac{e^{\alpha}}{x^{\gamma}} \approx \begin{cases} \zeta(\gamma) e^{\alpha} & \text{gdy } \gamma > 1 \\ \alpha e^{\alpha} & \text{gdy } \gamma = 1 \\ \frac{e^{\frac{\alpha}{\gamma}}}{1-\gamma} & \text{gdy } 0 < \gamma < 1 \end{cases} \quad (14)$$

gdzie $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^t}$ jest funkcją Zeta Riemanna.



- Analogicznie można wyliczyć ilość krawędzi:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{e^{\frac{\alpha}{\gamma}}} x \frac{e^{\alpha}}{x^{\gamma}} \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \zeta(\gamma - 1) e^{\alpha} & \text{gdy } \gamma > 2 \\ \frac{1}{4} \alpha e^{\alpha} & \text{gdy } \gamma = 2 \\ \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{2\alpha}{\gamma}}}{2 - \gamma} & \text{gdy } 0 < \gamma < 2 \end{cases} \quad (15)$$

- W powyższych rozważaniach mogą pojawić się błędy wynikające z zaokrągleń (ostatecznie stopień musi być liczbą całkowitą, podobnie jak ilość wierzchołków spełniających określone warunki). Można sobie jednak z tym poradzić, szczególnie gdy $\gamma \geq 2$.



- Analogicznie można wyliczyć ilość krawędzi:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{e^{\frac{\alpha}{\gamma}}} x \frac{e^{\alpha}}{x^{\gamma}} \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \zeta(\gamma - 1) e^{\alpha} & \text{gdy } \gamma > 2 \\ \frac{1}{4} \alpha e^{\alpha} & \text{gdy } \gamma = 2 \\ \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{2\alpha}{\gamma}}}{2 - \gamma} & \text{gdy } 0 < \gamma < 2 \end{cases} \quad (15)$$

- W powyższych rozważaniach mogą pojawić się błędy wynikające z zaokrągleń (ostatecznie stopień musi być liczbą całkowitą, podobnie jak ilość wierzchołków spełniających określone warunki). Można sobie jednak z tym poradzić, szczególnie gdy $\gamma \geq 2$.



- Analogicznie można wyliczyć ilość krawędzi:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{e^{\frac{\alpha}{\gamma}}} \frac{e^{\alpha}}{x^{\gamma}} \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \zeta(\gamma - 1) e^{\alpha} & \text{gdy } \gamma > 2 \\ \frac{1}{4} \alpha e^{\alpha} & \text{gdy } \gamma = 2 \\ \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{2\alpha}{\gamma}}}{2 - \gamma} & \text{gdy } 0 < \gamma < 2 \end{cases} \quad (15)$$

- W powyższych rozważaniach mogą pojawić się błędy wynikające z zaokrągleń (ostatecznie stopień musi być liczbą całkowitą, podobnie jak ilość wierzchołków spełniających określone warunki). Można sobie jednak z tym poradzić, szczególnie gdy $\gamma \geq 2$.



- Ostatecznie aby ustalić wektor $\mathbf{w}$ potrzebujemy oczekiwanego średniego stopnia w oraz zakresu stopni jaki dopuszczamy (szczególnie maksymalny stopień d_{max}).
- Możemy wtedy ustalić $w_i = c \cdot (i + i_0)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$ dla $1 \leq i \leq n$ gdzie $c = \frac{\gamma-2}{\gamma-1} w n^{\frac{1}{1-\gamma}}$ oraz $i_0 = n \left(\frac{w(\gamma-2)}{d_{max}(\gamma-1)} \right)^{\gamma-1}$



- Ostatecznie aby ustalić wektor $\mathbf{w}$ potrzebujemy oczekiwanego średniego stopnia w oraz zakresu stopni jaki dopuszczamy (szczególnie maksymalny stopień d_{max}).
- Możemy wtedy ustalić $w_i = c \cdot (i + i_0)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$ dla $1 \leq i \leq n$ gdzie $c = \frac{\gamma-2}{\gamma-1} w n^{\frac{1}{1-\gamma}}$ oraz $i_0 = n \left(\frac{w(\gamma-2)}{d_{max}(\gamma-1)} \right)^{\gamma-1}$



- Ostatecznie aby ustalić wektor $\mathbf{w}$ potrzebujemy oczekiwanego średniego stopnia w oraz zakresu stopni jaki dopuszczamy (szczególnie maksymalny stopień d_{max}).
- Możemy wtedy ustalić $w_i = c \cdot (i + i_0)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$ dla $1 \leq i \leq n$
gdzie $c = \frac{\gamma-2}{\gamma-1} w n^{\frac{1}{1-\gamma}}$ oraz $i_0 = n \left(\frac{w(\gamma-2)}{d_{max}(\gamma-1)} \right)^{\gamma-1}$



Właściwości grafu losowego GRG

- Badanie losowego grafu rozpoczniemy od naturalnego pytania:
Mając graf G wylosowany z $G(\mathbf{w})$ jaka jest spodziewana liczba wierzchołków o stopniu k ?
- Jest to nietrywialne pytanie mimo, że explicite zadajemy oczekiwany rozkład stopni wierzchołków. Ten jednak daje nam jedynie przestrzeń probabilistyczną, chcemy jednak poznać wartości oczekiwane pewnych innych parametrów grafu w tej przestrzeni.
- Spodziewamy się, że jeśli nasz graf będzie miał oczekiwany rozkład stopni wierzchołków spełniający prawo potęgowe, to oczekiwana ilość wierzchołków o stopniu k będzie proporcjonalna do $k^{-\gamma}$



Policzmy prawdopodobieństwo, że węzeł v_i jest izolowany:

$$P(v_i \text{ izolowany}) = \prod_j (1 - w_i w_j s) \quad (16)$$

$$= e^{-\sum_j w_i w_j s} + O\left(w_i^2 s^2 \sum_j w_j^2\right) \quad (17)$$

$$= e^{-w_i} + O\left(w_i^2 s^2 \sum_j w_j^2\right) \quad (18)$$

Zakładamy tutaj, że $\tilde{w} = o(n)$ co oznacza $w_i w_j s$ są małe. Możemy wtedy zapisać $1 - x = e^{-x} + O(x^2) = e^{-x}(1 + O(x^2))$ dla $x \approx 0$.



Policzmy prawdopodobieństwo, że węzeł v_i jest izolowany:

$$P(v_i \text{ izolowany}) = \prod_j (1 - w_i w_j s) \quad (16)$$

$$= e^{-\sum_j w_i w_j s} + O\left(w_i^2 s^2 \sum_j w_j^2\right) \quad (17)$$

$$= e^{-w_i} + O\left(w_i^2 s^2 \sum_j w_j^2\right) \quad (18)$$

Zakładamy tutaj, że $\tilde{w} = o(n)$ co oznacza $w_i w_j s$ są małe. Możemy wtedy zapisać $1 - x = e^{-x} + O(x^2) = e^{-x}(1 + O(x^2))$ dla $x \approx 0$.



Zatem ilość oczekiwana ilość izolowanych węzłów wynosi:

$$E(\text{ilość izolowanych w } G) = \sum_i \left(e^{-w_i} + O \left(w_i^2 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \quad (19)$$

$$= \sum_i e^{-w_i} + O(\tilde{w}^2) \quad (20)$$

gdzie $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$. Zauważmy:

$$\sum_i w_i^2 s^2 \sum_j w_j^2 = \frac{(\sum_i w_i^2)^2}{(\sum_j w_j)^2} = \frac{(\sum_i w_i^2)^2}{(\sum_i w_i)^2} = \tilde{w}^2$$



Zatem ilość oczekiwana ilość izolowanych węzłów wynosi:

$$E(\text{ilość izolowanych w } G) = \sum_i \left(e^{-w_i} + O \left(w_i^2 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \quad (19)$$

$$= \sum_i e^{-w_i} + O(\tilde{w}^2) \quad (20)$$

gdzie $\tilde{w} = \frac{\sum w_i^2}{\sum w_i} = \frac{\sum w_i^2}{w}$. Zauważmy:

$$\sum_i w_i^2 s^2 \sum_j w_j^2 = \frac{(\sum_i w_i^2)^2}{(\sum_j w_j)^2} = \frac{(\sum_i w_i^2)^2}{(\sum_i w_i)^2} = \tilde{w}^2$$



Następnie policzmy oczekiwaną ilość węzłów o stopniu dokładnie 1:

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia 1 w } G) &= \\ &= \sum_j w_j w_j s \prod_{l \neq j} (1 - w_l w_l s) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) \sum_l \frac{w_l w_l s}{1 - w_l w_l s} \right) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) w_i \sum_l (w_l s \cdot (1 + w_l w_l s + (w_l w_l s)^2 + \dots)) \right) = \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i w_i s} + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \end{aligned}$$



Następnie policzmy oczekiwaną ilość węzłów o stopniu dokładnie 1:

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia 1 w } G) &= \\ &= \sum_j w_j w_j s \prod_{l \neq j} (1 - w_l w_l s) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) \sum_l \frac{w_l w_l s}{1 - w_l w_l s} \right) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) w_i \sum_l (w_l s \cdot (1 + w_l w_l s + (w_l w_l s)^2 + \dots)) \right) = \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i w_i s} + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \end{aligned}$$



Następnie policzmy oczekiwaną ilość węzłów o stopniu dokładnie 1:

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia 1 w } G) &= \\ &= \sum_j w_j w_j s \prod_{l \neq j} (1 - w_l w_l s) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) \sum_l \frac{w_l w_l s}{1 - w_l w_l s} \right) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) w_i \sum_l (w_l s \cdot (1 + w_l w_l s + (w_l w_l s)^2 + \dots)) \right) = \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i w_i s} + O\left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \end{aligned}$$



Następnie policzmy oczekiwaną ilość węzłów o stopniu dokładnie 1:

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia 1 w } G) &= \\ &= \sum_j w_j w_j s \prod_{l \neq j} (1 - w_l w_l s) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) \sum_l \frac{w_l w_l s}{1 - w_l w_l s} \right) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) w_j \sum_l (w_l s \cdot (1 + w_l w_l s + (w_l w_l s)^2 + \dots)) \right) = \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i w_i s} + O\left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2\right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \end{aligned}$$



Następnie policzmy oczekiwaną ilość węzłów o stopniu dokładnie 1:

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia 1 w } G) &= \\ &= \sum_j w_j w_j s \prod_{l \neq j} (1 - w_l w_l s) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) \sum_l \frac{w_l w_l s}{1 - w_l w_l s} \right) = \\ &= \sum_i \left(\prod_j (1 - w_j w_j s) w_i \sum_l (w_l s \cdot (1 + w_l w_l s + (w_l w_l s)^2 + \dots)) \right) = \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i w_i s} + O\left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2\right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \left(1 + O(w_i \sum_l w_l^2 s^2) \right) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(\underbrace{e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w})}_{\leq 1} \right) (1 + O(w_i \tilde{w} s)) \right) \\ &= \sum_i (e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w}) + O(w_i \tilde{w} s)) = \sum_i e^{-w_i} w_i + O \left(\sum_i w_i^3 s \tilde{w} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_i (w_i s + O(w_i w_i^2 s^2)) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \left(1 + O(w_i \sum_i w_i^2 s^2) \right) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(\underbrace{e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w})}_{\leq 1} \right) (1 + O(w_i \tilde{w} s)) \right) \\ &= \sum_i (e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w}) + O(w_i \tilde{w} s)) = \sum_i e^{-w_i} w_i + O \left(\sum_i w_i^3 s \tilde{w} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \left(1 + O(w_i \sum_l w_l^2 s^2) \right) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(\underbrace{e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w})}_{\leq 1} \right) (1 + O(w_i \tilde{w} s)) \right) \\ &= \sum_i (e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w}) + O(w_i \tilde{w} s)) = \sum_i e^{-w_i} w_i + O \left(\sum_i w_i^3 s \tilde{w} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \left(1 + O(w_i \sum_l w_l^2 s^2) \right) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(\underbrace{e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w})}_{\leq 1} \right) (1 + O(w_i \tilde{w} s)) \right) \\ &= \sum_i (e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w}) + O(w_i \tilde{w} s)) = \sum_i e^{-w_i} w_i + O \left(\sum_i w_i^3 s \tilde{w} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \left(1 + O(w_i \sum_l w_l^2 s^2) \right) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(\underbrace{e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w})}_{\leq 1} \right) (1 + O(w_i \tilde{w} s)) \right) \\ &= \sum_i (e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w}) + O(w_i \tilde{w} s)) = \sum_i e^{-w_i} w_i + O \left(\sum_i w_i^3 s \tilde{w} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \left(1 + O(w_i \sum_l w_l^2 s^2) \right) \right) \\ &= \sum_i \left(\left(\underbrace{e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w})}_{\leq 1} \right) (1 + O(w_i \tilde{w} s)) \right) \\ &= \sum_i (e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w}) + O(w_i \tilde{w} s)) = \sum_i e^{-w_i} w_i + O \left(\sum_i w_i^3 s \tilde{w} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \sum_l (w_l s + O(w_l w_l^2 s^2)) \right) \\
 &= \sum_i \left(\left(e^{-w_i} w_i + O \left(w_i^3 s^2 \sum_j w_j^2 \right) \right) \left(1 + O(w_i \sum_l w_l^2 s^2) \right) \right) \\
 &= \sum_i \left(\left(\underbrace{e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w})}_{\leq 1} \right) (1 + O(w_i \tilde{w} s)) \right) \\
 &= \sum_i (e^{-w_i} w_i + O(w_i^3 s \tilde{w}) + O(w_i \tilde{w} s)) = \sum_i e^{-w_i} w_i + O \left(\sum_i w_i^3 s \tilde{w} \right)
 \end{aligned}$$



Analogicznie wyliczamy ilość wierzchołków stopnia dokładnie k:

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia } k \text{ w } G) &= \\ &= \sum_i \prod_j (1 - w_j s) \sum_{T \subset V, |T|=k} \prod_{l \in T} \frac{w_l w_l s}{1 - w_l w_l s} \\ &= \sum_i e^{-w_i} w_i^k \frac{(\sum_l w_l)^k s^k}{k!} + O(\tilde{w} \tilde{w}_{(k+1)}) \\ &= \sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \end{aligned}$$

Gdzie $\tilde{w}_{(k)} = \sum_i w_i^k s$.



Analogicznie wyliczamy ilość wierzchołków stopnia dokładnie k :

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia } k \text{ w } G) &= \\ &= \sum_i \prod_j (1 - w_i w_j s) \sum_{T \subset V, |T|=k} \prod_{l \in T} \frac{w_l w_l s}{1 - w_l w_l s} \\ &= \sum_i e^{-w_i} w_i^k \frac{(\sum_l w_l)^k s^k}{k!} + O(\tilde{w} \tilde{w}_{(k+1)}) \\ &= \sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \end{aligned}$$

Gdzie $\tilde{w}_{(k)} = \sum_i w_i^k s$.



Analogicznie wyliczamy ilość wierzchołków stopnia dokładnie k:

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia } k \text{ w } G) &= \\ &= \sum_i \prod_j (1 - w_j s) \sum_{T \subset V, |T|=k} \prod_{l \in T} \frac{w_l w_l s}{1 - w_l w_l s} \\ &= \sum_i e^{-w_i} w_i^k \frac{(\sum_l w_l)^k s^k}{k!} + O(\tilde{w} \tilde{w}_{(k+1)}) \\ &= \sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \end{aligned}$$

Gdzie $\tilde{w}_{(k)} = \sum_i w_i^k s$.



Reasumując, przy założeniu, że $\tilde{w} = o(n)$ spodziewana ilość wierzchołków o stopniu k w grafie $G \in G(\mathbf{w})$ wynosi:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \quad (21)$$

Założmy teraz, że sekwencja $\mathbf{w}$ spełnia prawo potęgowe z wykładnikiem γ , czyli $w_i = c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$. Rozważmy:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} \approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i \quad (22)$$

Oraz zauważmy

$$\frac{dw_i}{di} = \frac{d}{di} c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}} = \frac{-c}{\gamma-1} (i + i_0)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \frac{-c^{(1-\gamma)}}{\gamma-1} w_i^\gamma \quad (23)$$



Reasumując, przy założeniu, że $\tilde{w} = o(n)$ spodziewana ilość wierzchołków o stopniu k w grafie $G \in G(\mathbf{w})$ wynosi:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \quad (21)$$

Założmy teraz, że sekwencja $\mathbf{w}$ spełnia prawo potęgowe z wykładnikiem γ , czyli $w_i = c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$. Rozważmy:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} \approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i \quad (22)$$

Oraz zauważmy

$$\frac{dw_i}{di} = \frac{d}{di} c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}} = \frac{-c}{\gamma-1} (i + i_0)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \frac{-c^{(1-\gamma)}}{\gamma-1} w_i^\gamma \quad (23)$$



Reasumując, przy założeniu, że $\tilde{w} = o(n)$ spodziewana ilość wierzchołków o stopniu k w grafie $G \in G(\mathbf{w})$ wynosi:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \quad (21)$$

Założmy teraz, że sekwencja $\mathbf{w}$ spełnia prawo potęgowe z wykładnikiem γ , czyli $w_i = c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$. Rozważmy:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} \approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i \quad (22)$$

Oraz zauważmy

$$\frac{dw_i}{di} = \frac{d}{di} c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}} = \frac{-c}{\gamma-1} (i + i_0)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \frac{-c^{(1-\gamma)}}{\gamma-1} w_i^\gamma \quad (23)$$



Reasumując, przy założeniu, że $\tilde{w} = o(n)$ spodziewana ilość wierzchołków o stopniu k w grafie $G \in G(\mathbf{w})$ wynosi:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \quad (21)$$

Założmy teraz, że sekwencja $\mathbf{w}$ spełnia prawo potęgowe z wykładnikiem γ , czyli $w_i = c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$. Rozważmy:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} \approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i \quad (22)$$

Oraz zauważmy

$$\frac{dw_i}{di} = \frac{d}{di} c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}} = \frac{-c}{\gamma-1} (i + i_0)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \frac{-c^{(1-\gamma)}}{\gamma-1} w_i^\gamma \quad (23)$$



Reasumując, przy założeniu, że $\tilde{w} = o(n)$ spodziewana ilość wierzchołków o stopniu k w grafie $G \in G(\mathbf{w})$ wynosi:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \quad (21)$$

Założmy teraz, że sekwencja $\mathbf{w}$ spełnia prawo potęgowe z wykładnikiem γ , czyli $w_i = c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$. Rozważmy:

$$\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} \approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i \quad (22)$$

Oraz zauważmy

$$\frac{dw_i}{di} = \frac{d}{di} c(i + i_0)^{\frac{-1}{\gamma-1}} = \frac{-c}{\gamma-1} (i + i_0)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = \frac{-c^{(1-\gamma)}}{\gamma-1} w_i^\gamma \quad (23)$$



Mamy dalej:

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} &\approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i = \\ &= \frac{c'}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{k-\gamma} dt = \\ &= \frac{c'}{k!} \Gamma(k-\gamma+1) = \frac{c' \Gamma(k-\gamma+1)}{\Gamma(k+1)} \approx k^{-\gamma}\end{aligned}$$

Dla naturalnych γ widać to łatwo:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{\Gamma(k+1)} &= \frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1) \Gamma(k+1-\gamma)} = \\ &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1)} \approx \frac{1}{k^\gamma} = k^{-\gamma}\end{aligned}$$



Mamy dalej:

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} &\approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i = \\ &= \frac{c'}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{k-\gamma} dt = \\ &= \frac{c'}{k!} \Gamma(k-\gamma+1) = \frac{c' \Gamma(k-\gamma+1)}{\Gamma(k+1)} \approx k^{-\gamma}\end{aligned}$$

Dla naturalnych γ widać to łatwo:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{\Gamma(k+1)} &= \frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1) \Gamma(k+1-\gamma)} = \\ &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1)} \approx \frac{1}{k^\gamma} = k^{-\gamma}\end{aligned}$$



Mamy dalej:

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} &\approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c(1-\gamma)} w_i^{k-\gamma} dw_i = \\ &= \frac{c'}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{k-\gamma} dt = \\ &= \frac{c'}{k!} \Gamma(k-\gamma+1) = \frac{c' \Gamma(k-\gamma+1)}{\Gamma(k+1)} \approx k^{-\gamma}\end{aligned}$$

Dla naturalnych γ widać to łatwo:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{\Gamma(k+1)} &= \frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1) \Gamma(k+1-\gamma)} = \\ &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1)} \approx \frac{1}{k^\gamma} = k^{-\gamma}\end{aligned}$$



Mamy dalej:

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} &\approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i = \\ &= \frac{c'}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{k-\gamma} dt = \\ &= \frac{c'}{k!} \Gamma(k-\gamma+1) = \frac{c' \Gamma(k-\gamma+1)}{\Gamma(k+1)} \approx k^{-\gamma}\end{aligned}$$

Dla naturalnych γ widać to łatwo:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{\Gamma(k+1)} &= \frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1) \Gamma(k+1-\gamma)} = \\ &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1)} \approx \frac{1}{k^\gamma} = k^{-\gamma}\end{aligned}$$



Mamy dalej:

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} &\approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i = \\ &= \frac{c'}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{k-\gamma} dt = \\ &= \frac{c'}{k!} \Gamma(k-\gamma+1) = \frac{c' \Gamma(k-\gamma+1)}{\Gamma(k+1)} \approx k^{-\gamma}\end{aligned}$$

Dla naturalnych γ widać to łatwo:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{\Gamma(k+1)} &= \frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1) \Gamma(k+1-\gamma)} = \\ &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1)} \approx \frac{1}{k^\gamma} = k^{-\gamma}\end{aligned}$$



Mamy dalej:

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} &\approx \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} w_i^k di = \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-w_i} \frac{\gamma-1}{c^{(1-\gamma)}} w_i^{k-\gamma} dw_i = \\ &= \frac{c'}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{k-\gamma} dt = \\ &= \frac{c'}{k!} \Gamma(k-\gamma+1) = \frac{c' \Gamma(k-\gamma+1)}{\Gamma(k+1)} \approx k^{-\gamma}\end{aligned}$$

Dla naturalnych γ widać to łatwo:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{\Gamma(k+1)} &= \frac{\Gamma(k+1-\gamma)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1) \Gamma(k+1-\gamma)} = \\ &= \frac{1}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-\gamma+1)} \approx \frac{1}{k^\gamma} = k^{-\gamma}\end{aligned}$$



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia

Model Barabási-Albert
Model General Random Graph - GRG
Losowy graf z prawem potęgowym
Własności uogólnionego grafu losowego
Niezmienność prawa potęgowego



Niezmienność prawa potęgowego

- Powyższe rachunki możemy wykorzystać do pokazania ciekawego faktu - prawo potęgowe jak i wykładnik są zachowane przy wzięciu losowego podgrafu grafu G
- Rozważmy dwa sposoby wybierania losowego podgrafu - jeden poprzez wybranie każdego wierzchołka z prawdopodobieństwem p_i , drugi poprzez wybranie każdej krawędzi z prawdopodobieństwem $p_{i,j}$
- Ostatecznie każda krawędź podgrafu G zostanie wzięta z prawdopodobieństwem $w_i w_j s p_i p_j$ lub $w_i w_j s p_{i,j}$ odpowiednio.



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia

Model Barabási-Albert
Model General Random Graph - GRG
Losowy graf z prawem potęgowym
Własności uogólnionego grafu losowego
Niezmienność prawa potęgowego



Niezmienność prawa potęgowego

- Powyższe rachunki możemy wykorzystać do pokazania ciekawego faktu - prawo potęgowe jak i wykładnik są zachowane przy wzięciu losowego podgrafu grafu G
- Rozważmy dwa sposoby wybierania losowego podgrafu - jeden poprzez wybranie każdego wierzchołka z prawdopodobieństwem p_i , drugi poprzez wybranie każdej krawędzi z prawdopodobieństwem $p_{i,j}$
- Ostatecznie każda krawędź podgrafu G zostanie wzięta z prawdopodobieństwem $w_i w_j s p_i p_j$ lub $w_i w_j s p_{i,j}$ odpowiednio.



Niezmienność prawa potęgowego

- Powyższe rachunki możemy wykorzystać do pokazania ciekawego faktu - prawo potęgowe jak i wykładnik są zachowane przy wzięciu losowego podgrafu grafu G
- Rozważmy dwa sposoby wybierania losowego podgrafu - jeden poprzez wybranie każdego wierzchołka z prawdopodobieństwem p_i , drugi poprzez wybranie każdej krawędzi z prawdopodobieństwem $p_{i,j}$
- Ostatecznie każda krawędź podgrafu G zostanie wzięta z prawdopodobieństwem $w_i w_j s p_i p_j$ lub $w_i w_j s p_{i,j}$ odpowiednio.



Wyliczmy ilość wierzchołków stopnia dokładnie k w podgrafie G :

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia } k \text{ w podgrafie } G) &= \\ &= \sum_i \prod_j (1 - w_i w_j s p_{i,j}) \sum_{T \subset V, |T|=k} \prod_{l \in T} \frac{w_l w_l s p_{l,j}}{1 - w_l w_l s p_{l,j}} \\ &= \sum_i e^{-w_i} w_i^k \frac{(\sum_l w_l)^k s^k p_j^k}{k!} + O(\tilde{w} \tilde{w}_{(k+1)}) \\ &= \sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \end{aligned}$$

Dodatkowe prawdopodobieństwa wpadają w notację O do wyrazów mniej znaczących. Zatem oszacowanie na ilość wierzchołków stopnia k się nie zmienia!



Wyliczmy ilość wierzchołków stopnia dokładnie k w podgrafie G :

$$\begin{aligned} E(\text{ilość węzłów stopnia } k \text{ w podgrafie } G) &= \\ &= \sum_i \prod_j (1 - w_i w_j s_{p_{i,j}}) \sum_{T \subset V, |T|=k} \prod_{l \in T} \frac{w_l w_l s_{p_{l,l}}}{1 - w_l w_l s_{p_{l,l}}} \\ &= \sum_i e^{-w_i} w_i^k \frac{(\sum_l w_l)^k s^k p_j^k}{k!} + O(\tilde{w} \tilde{w}_{(k+1)}) \\ &= \sum_i \frac{e^{-w_i} w_i^k}{k!} + O\left(\frac{1}{k!} \tilde{w} \tilde{w}_{(k+2)}\right) \end{aligned}$$

Dodatkowe prawdopodobieństwa wpadają w notację O do wyrazów mniej znaczących. Zatem oszacowanie na ilość wierzchołków stopnia k się nie zmienia!



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia

Model Barabási-Albert
Model General Random Graph - GRG
Losowy graf z prawem potęgowym
Własności uogólnionego grafu losowego
Niezmienność prawa potęgowego



Chwila oddechu

- Pokazaliśmy, iż w modelu GRG można badać grafy z prawem potęgowym.
- Pokazaliśmy, iż losowy graf z oczekiwanym rozkładem wierzchołków spełniającym prawo potęgowe istotnie z dużym prawdopodobieństwem jest takim grafem.
- Pokazaliśmy, iż prawo potęgowe wraz z wykładnikami są niezmiennicze przy braniu losowego podgrafu (z dużym prawdopodobieństwem). Tutaj pojawia się wyjaśnienie terminu "bezskałowy".
- Czy to już koniec i można iść spać?



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia

Model Barabási-Albert
Model General Random Graph - GRG
Losowy graf z prawem potęgowym
Własności uogólnionego grafu losowego
Niezmienniczość prawa potęgowego



Chwila oddechu

- Pokazaliśmy, iż w modelu GRG można badać grafy z prawem potęgowym.
- Pokazaliśmy, iż losowy graf z oczekiwanym rozkładem wierzchołków spełniającym prawo potęgowe istotnie z dużym prawdopodobieństwem jest takim grafem.
- Pokazaliśmy, iż prawo potęgowe wraz z wykładnikiem są niezmiennicze przy braniu losowego podgrafu (z dużym prawdopodobieństwem). Tutaj pojawia się wyjaśnienie terminu "bezskałowy".
- Czy to już koniec i można iść spać?



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia

Model Barabási-Albert
Model General Random Graph - GRG
Losowy graf z prawem potęgowym
Własności uogólnionego grafu losowego
Niezmienność prawa potęgowego



Chwila oddechu

- Pokazaliśmy, iż w modelu GRG można badać grafy z prawem potęgowym.
- Pokazaliśmy, iż losowy graf z oczekiwanym rozkładem wierzchołków spełniającym prawo potęgowe istotnie z dużym prawdopodobieństwem jest takim grafem.
- Pokazaliśmy, iż prawo potęgowe wraz z wykładnikiem są niezmiennicze przy braniu losowego podgrafu (z dużym prawdopodobieństwem). Tutaj pojawia się wyjaśnienie terminu "bezskałowy".
- Czy to już koniec i można iść spać?



Chwila oddechu

- Pokazaliśmy, iż w modelu GRG można badać grafy z prawem potęgowym.
- Pokazaliśmy, iż losowy graf z oczekiwanym rozkładem wierzchołków spełniającym prawo potęgowe istotnie z dużym prawdopodobieństwem jest takim grafem.
- Pokazaliśmy, iż prawo potęgowe wraz z wykładnikiem są **niezmiennicze** przy braniu losowego podgrafu (z dużym prawdopodobieństwem). Tutaj pojawia się wyjaśnienie terminu "**bezskałowy**".
- Czy to już koniec i można iść spać?



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia

Model Barabási-Albert
Model General Random Graph - GRG
Losowy graf z prawem potęgowym
Własności uogólnionego grafu losowego
Niezmienność prawa potęgowego



Chwila oddechu

- Pokazaliśmy, iż w modelu GRG można badać grafy z prawem potęgowym.
- Pokazaliśmy, iż losowy graf z oczekiwanym rozkładem wierzchołków spełniającym prawo potęgowe istotnie z dużym prawdopodobieństwem jest takim grafem.
- Pokazaliśmy, iż prawo potęgowe wraz z wykładnikiem są niezmiennicze przy braniu losowego podgrafu (z dużym prawdopodobieństwem). Tutaj pojawia się wyjaśnienie terminu "bezskałowy".
- Czy to już koniec i można iść spać?



Krytyka powszechnych wierzeń nt. sieci bezskalowych

W pracy [Li *et al.* , 2005] autorzy wytykają liczne błędy popełniane i utrwalane w literaturze na temat sieci bezskalowych

- Autorzy milcząco zakładają, iż prawo potęgowe w stopniach wierzchołków gwarantuje rozmaite inne cechy, takie jak istnienie hubów, podatność na celowane ataki (możliwość rozspójnienia przez eliminację hubów) itp.
- Autorzy milcząco zakładają, że sieć z hubami jest optymalna komunikacyjnie
- W szczególności dosyć poważne błędy metodologiczne zostały popełnione przy badaniu Internetu na poziomie routerów
- Prawo potęgowe jest traktowane jako gwarancja samopodobieństwa grafu ze względu na rozmaite kontrakcje,



Krytyka powszechnych wierzeń nt. sieci bezskalowych

W pracy [Li *et al.* , 2005] autorzy wytykają liczne błędy popełniane i utrwalane w literaturze na temat sieci bezskalowych

- Autorzy milcząco zakładają, iż prawo potęgowe w stopniach wierzchołków gwarantuje rozmaite inne cechy, takie jak istnienie hubów, podatność na celowane ataki (możliwość rozspójnienia przez eliminację hubów) itp.
- Autorzy milcząco zakładają, że sieć z hubami jest optymalna komunikacyjnie
- W szczególności dosyć poważne błędy metodologiczne zostały popełnione przy badaniu Internetu na poziomie routerów
- Prawo potęgowe jest traktowane jako gwarancja samopodobieństwa grafu ze względu na rozmaite kontrakcje,



Krytyka powszechnych wierzeń nt. sieci bezskalowych

W pracy [Li *et al.* , 2005] autorzy wytykają liczne błędy popełniane i utrwalane w literaturze na temat sieci bezskalowych

- Autorzy milcząco zakładają, iż prawo potęgowe w stopniach wierzchołków gwarantuje rozmaite inne cechy, takie jak istnienie hubów, podatność na celowane ataki (możliwość rozspójnienia przez eliminację hubów) itp.
- Autorzy milcząco zakładają, że sieć z hubami jest optymalna komunikacyjnie
- W szczególności dosyć poważne błędy metodologiczne zostały popełnione przy badaniu Internetu na poziomie routerów
- Prawo potęgowe jest traktowane jako gwarancja samopodobieństwa grafu ze względu na rozmaite kontrakcje,



Krytyka powszechnych wierzeń nt. sieci bezskalowych

W pracy [Li *et al.* , 2005] autorzy wytykają liczne błędy popełniane i utrwalane w literaturze na temat sieci bezskalowych

- Autorzy milcząco zakładają, iż prawo potęgowe w stopniach wierzchołków gwarantuje rozmaite inne cechy, takie jak istnienie hubów, podatność na celowane ataki (możliwość rozspójnienia przez eliminację hubów) itp.
- Autorzy milcząco zakładają, że sieć z hubami jest optymalna komunikacyjnie
- W szczególności dosyć poważne błędy metodologiczne zostały popełnione przy badaniu Internetu na poziomie routerów
- Prawo potęgowe jest traktowane jako gwarancja samopodobieństwa grafu ze względu na rozmaite kontrakcje,



Krytyka powszechnych wierzeń nt. sieci bezskalowych

W pracy [Li *et al.* , 2005] autorzy wytykają liczne błędy popełniane i utrwalane w literaturze na temat sieci bezskalowych

- Autorzy milcząco zakładają, iż prawo potęgowe w stopniach wierzchołków gwarantuje rozmaite inne cechy, takie jak istnienie hubów, podatność na celowane ataki (możliwość rozspójnienia przez eliminację hubów) itp.
- Autorzy milcząco zakładają, że sieć z hubami jest optymalna komunikacyjnie
- W szczególności dosyć poważne błędy metodologiczne zostały popełnione przy badaniu Internetu na poziomie routerów
- Prawo potęgowe jest traktowane jako gwarancja samopodobieństwa grafu ze względu na rozmaite kontrakcje,



Oznaczenia

Aby przejść do dalszych rozważań potrzebujemy kilka oznaczeń: Niech $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem liczb takich, że tworzy on ciąg stopni wierzchołków pewnego grafu (zakładamy, że $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$). Na mocy twierdzenia Erdős'a-Gallai [Erdős & Gallai, 1960] ciąg taki jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego grafu o ile:

- $\sum_{i=1}^n d_i$ jest parzyste
- dla każdego k takiego, że $1 \leq k \leq n-1$ zachodzi:

$$\sum_{j=1}^k d_j \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min(k, d_j) \quad (24)$$



Oznaczenia

Aby przejść do dalszych rozważań potrzebujemy kilka oznaczeń: Niech $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem liczb takich, że tworzy on ciąg stopni wierzchołków pewnego grafu (zakładamy, że $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$). Na mocy twierdzenia Erdős'a-Gallai [Erdős & Gallai, 1960] ciąg taki jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego grafu o ile:

- $\sum_{i=1}^n d_i$ jest parzyste
- dla każdego k takiego, że $1 \leq k \leq n - 1$ zachodzi:

$$\sum_{j=1}^k d_j \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min(k, d_j) \quad (24)$$



Oznaczenia

Aby przejść do dalszych rozważań potrzebujemy kilka oznaczeń: Niech $\mathbf{D} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ będzie ciągiem liczb takich, że tworzy on ciąg stopni wierzchołków pewnego grafu (zakładamy, że $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$). Na mocy twierdzenia Erdős'a-Gallai [Erdős & Gallai, 1960] ciąg taki jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego grafu o ile:

- $\sum_{i=1}^n d_i$ jest parzyste
- dla każdego k takiego, że $1 \leq k \leq n-1$ zachodzi:

$$\sum_{j=1}^k d_j \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min(k, d_j) \quad (24)$$



Oznaczenia

- Następnie oznaczmy przez $G_{fix}(\mathbf{D})$ przestrzeń wszystkich grafów o zadanym ciągu stopni wierzchołków.
- Zauważmy, że mówimy tu nie o oczekiwanym stopniu, ale o konkretnym stopniu!
- Oczywiście $G_{fix}(\mathbf{D}) \subset G(\mathbf{D})$ bo $G_{fix}(\mathbf{D})$ zawiera tylko grafy o ustalonym stopniu każdego z wierzchołków, zaś $G(\mathbf{D})$ zawiera wszystkie grafy, jedynie skupiając miarę w ten sposób, że oczekiwany rozkład stopni wynosi $\mathbf{D}$.
- Moc $G_{fix}(\mathbf{D})$ jest zaniedbywalnie mała przy mocy $G(\mathbf{D})$, co nie zmienia faktu, że dla dużych n jest astronomiczna.



Oznaczenia

- Następnie oznaczmy przez $G_{fix}(\mathbf{D})$ przestrzeń wszystkich grafów o zadanym ciągu stopni wierzchołków.
- Zauważmy, że mówimy tu nie o oczekiwanym stopniu, ale o konkretnym stopniu!
- Oczywiście $G_{fix}(\mathbf{D}) \subset G(\mathbf{D})$ bo $G_{fix}(\mathbf{D})$ zawiera tylko grafy o ustalonym stopniu każdego z wierzchołków, zaś $G(\mathbf{D})$ zawiera wszystkie grafy, jedynie skupiając miarę w ten sposób, że oczekiwany rozkład stopni wynosi $\mathbf{D}$.
- Moc $G_{fix}(\mathbf{D})$ jest zaniedbywalnie mała przy mocy $G(\mathbf{D})$, co nie zmienia faktu, że dla dużych n jest astronomiczna.



Oznaczenia

- Następnie oznaczmy przez $G_{fix}(\mathbf{D})$ przestrzeń wszystkich grafów o zadanym ciągu stopni wierzchołków.
- Zauważmy, że mówimy tu nie o **oczekiwanym stopniu**, ale o **konkretnym stopniu**!
- Oczywiście $G_{fix}(\mathbf{D}) \subset G(\mathbf{D})$ bo $G_{fix}(\mathbf{D})$ zawiera tylko grafy o ustalonym stopniu każdego z wierzchołków, zaś $G(\mathbf{D})$ zawiera wszystkie grafy, jedynie skupiając miarę w ten sposób, że oczekiwany rozkład stopni wynosi $\mathbf{D}$.
- Moc $G_{fix}(\mathbf{D})$ jest zaniedbywalnie mała przy mocy $G(\mathbf{D})$, co nie zmienia faktu, że dla dużych n jest astronomiczna.



Oznaczenia

- Następnie oznaczmy przez $G_{fix}(\mathbf{D})$ przestrzeń wszystkich grafów o zadanym ciągu stopni wierzchołków.
- Zauważmy, że mówimy tu nie o oczekiwanym stopniu, ale o konkretnym stopniu!
- Oczywiście $G_{fix}(\mathbf{D}) \subset G(\mathbf{D})$ bo $G_{fix}(\mathbf{D})$ zawiera tylko grafy o ustalonym stopniu każdego z wierzchołków, zaś $G(\mathbf{D})$ zawiera wszystkie grafy, jedynie skupiając miarę w ten sposób, że oczekiwany rozkład stopni wynosi $\mathbf{D}$.
- Moc $G_{fix}(\mathbf{D})$ jest zaniedbywalnie mała przy mocy $G(\mathbf{D})$, co nie zmienia faktu, że dla dużych n jest astronomiczna.



Oznaczenia

- Następnie oznaczmy przez $G_{fix}(\mathbf{D})$ przestrzeń wszystkich grafów o zadanym ciągu stopni wierzchołków.
- Zauważmy, że mówimy tu nie o oczekiwanym stopniu, ale o konkretnym stopniu!
- Oczywiście $G_{fix}(\mathbf{D}) \subset G(\mathbf{D})$ bo $G_{fix}(\mathbf{D})$ zawiera tylko grafy o ustalonym stopniu każdego z wierzchołków, zaś $G(\mathbf{D})$ zawiera wszystkie grafy, jedynie skupiając miarę w ten sposób, że oczekiwany rozkład stopni wynosi $\mathbf{D}$.
- Moc $G_{fix}(\mathbf{D})$ jest zanedbywalnie mała przy mocy $G(\mathbf{D})$, co nie zmienia faktu, że dla dużych n jest astronomiczna.



Oznaczenia

- W $G_{fix}(\mathbf{D})$ możemy bardziej precyzyjnie przebadąć jaki może być graf o zadanym rozkładzie stopni. W szczególności można tu poszukiwać przykładów obalających powszechne wierzenia.
- Podobnie jak w innych częściach prezentacji ignorujemy izomorfizmy - to znaczy graf ma rozróżnialne wierzchołki
- Chwilowo ograniczymy się do spójnych grafów prostych. To znaczne ograniczenie, jednak tak ograniczona przestrzeń $G_{fix}(\mathbf{D})$ nadal jest bardzo bogata
- Zaprezentowane poniżej podejście jest strukturalne, to znaczy będziemy mierzyć parametry zależne o struktury połączeń a nie jedynie od stopni wierzchołków.



Oznaczenia

- W $G_{fix}(\mathbf{D})$ możemy bardziej precyzyjnie przebadąć jaki może być graf o zadanym rozkładzie stopni. W szczególności można tu poszukiwać przykładów obalających powszechne wierzenia.
- Podobnie jak w innych częściach prezentacji ignorujemy izomorfizmy - to znaczy graf ma rozróżnialne wierzchołki
- Chwilowo ograniczymy się do spójnych grafów prostych. To znaczne ograniczenie, jednak tak ograniczona przestrzeń $G_{fix}(\mathbf{D})$ nadal jest bardzo bogata
- Zaprezentowane poniżej podejście jest strukturalne, to znaczy będziemy mierzyć parametry zależne o struktury połączeń a nie jedynie od stopni wierzchołków.



Oznaczenia

- W $G_{fix}(\mathbf{D})$ możemy bardziej precyzyjnie przebadąć jaki może być graf o zadanym rozkładzie stopni. W szczególności można tu poszukiwać przykładów obalających powszechne wierzenia.
- Podobnie jak w innych częściach prezentacji ignorujemy izomorfizmy - to znaczy graf ma rozróżnialne wierzchołki
- Chwilowo ograniczymy się do spójnych grafów prostych. To znaczne ograniczenie, jednak tak ograniczona przestrzeń $G_{fix}(\mathbf{D})$ nadal jest bardzo bogata
- Zaprezentowane poniżej podejście jest strukturalne, to znaczy będziemy mierzyć parametry zależne od struktury połączeń a nie jedynie od stopni wierzchołków.



Oznaczenia

- W $G_{fix}(\mathbf{D})$ możemy bardziej precyzyjnie przebadąć jaki może być graf o zadanym rozkładzie stopni. W szczególności można tu poszukiwać przykładów obalających powszechne wierzenia.
- Podobnie jak w innych częściach prezentacji ignorujemy izomorfizmy - to znaczy graf ma rozróżnialne wierzchołki
- Chwilowo ograniczymy się do spójnych grafów prostych. To znaczne ograniczenie, jednak tak ograniczona przestrzeń $G_{fix}(\mathbf{D})$ nadal jest bardzo bogata
- Zaprezentowane poniżej podejście jest strukturalne, to znaczy będziemy mierzyć parametry zależne o struktury połączeń a nie jedynie od stopni wierzchołków.



S-miara

- Niech $G = (V, E)$
- Wprowadzimy następującą miarę:

$$s(g) = \sum_{(i,j) \in E} d_i d_j \quad (25)$$

- Zauważmy, że miara ta jest maksymalizowana w grafie w którym węzły o wysokich stopniach łączą się z innymi węzłami o wysokich stopniach. Wynika to z faktu, że dla $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ oraz dowolnej permutacji a'_k ciągu a_k mamy:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \dots + a'_n b_n \geq \\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n \end{aligned}$$



S-miara

- Niech $G = (V, E)$
- Wprowadzimy następującą miarę:

$$s(g) = \sum_{(i,j) \in E} d_i d_j \quad (25)$$

- Zauważmy, że miara ta jest maksymalizowana w grafie w którym węzły o wysokich stopniach łączą się z innymi węzłami o wysokich stopniach. Wynika to z faktu, że dla $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ oraz dowolnej permutacji a'_k ciągu a_k mamy:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \dots + a'_n b_n \geq \\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n \end{aligned}$$



S-miara

- Niech $G = (V, E)$
- Wprowadzimy następującą miarę:

$$s(g) = \sum_{(i,j) \in E} d_i d_j \quad (25)$$

- Zauważmy, że miara ta jest maksymalizowana w grafie w którym węzły o wysokich stopniach łączą się z innymi węzłami o wysokich stopniach. Wynika to z faktu, że dla $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ oraz dowolnej permutacji a'_k ciągu a_k mamy:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \dots + a'_n b_n \geq \\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \dots + a_1 b_n \end{aligned}$$



S-miara

- Zauważmy, że w zbiorze grafów d -regularnych w których $\mathbf{D} = (d, d, \dots, d)$ s-miara jest stała
- Przeciętny graf Erdős'a-Rényi (z odpowiednio wysoką gęstością krawędzi) jest "prawie" regularny (rozbieżność stopni w stosunku do ich wartości oczekiwanej zanika wykładniczo)
- Grafy z prawem potęgowym (i zasadniczo wszystkich których rozkłady stopni mają "ciężkie ogony") dają bardzo duży zakres możliwości wartości dla s-miary - zatem przestrzeń $G_{fix}(\mathbf{D})$ dla $\mathbf{D}$ spełniającego prawo potęgowe jest "strukturalnie ciekawa".



S-miara

- Zauważmy, że w zbiorze grafów d -regularnych w których $\mathbf{D} = (d, d, \dots, d)$ s-miara jest stała
- Przeciętny graf Erdősa-Rényi (z odpowiednio wysoką gęstością krawędzi) jest "prawie" regularny (rozbieżność stopni w stosunku do ich wartości oczekiwanej zanika wykładniczo)
- Grafy z prawem potęgowym (i zasadniczo wszystkich których rozkłady stopni mają "ciężkie ogony") dają bardzo duży zakres możliwości wartości dla s-miary - zatem przestrzeń $G_{\text{fix}}(\mathbf{D})$ dla $\mathbf{D}$ spełniającego prawo potęgowe jest "strukturalnie ciekawa".



S-miara

- Zauważmy, że w zbiorze grafów d -regularnych w których $\mathbf{D} = (d, d, \dots, d)$ s-miara jest stała
- Przeciętny graf Erdősa-Rényi (z odpowiednio wysoką gęstością krawędzi) jest "prawie" regularny (rozbieżność stopni w stosunku do ich wartości oczekiwanej zanika wykładniczo)
- Grafy z prawem potęgowym (i zasadniczo wszystkich których rozkłady stopni mają "ciężkie ogony") dają bardzo duży zakres możliwości wartości dla s-miary - zatem przestrzeń $G_{fix}(\mathbf{D})$ dla $\mathbf{D}$ spełniającego prawo potęgowe jest "strukturalnie ciekawa".



Graf s-max

- Przy zadanym **D** istnieje graf maksymalizujący miarę s
- Graf ten będziemy nazywać s_{max} dla danego **D**
- Istnieje efektywny algorytm konstrukcji s_{max} oparty o strategię zachłanną:
 - Skonstruuj listę wszystkich możliwych krawędzi w G sortując ją malejąco za względu na $d_i d_j$
 - Następnie dodawaj po kolei krawędzie do grafu, o ile da się to zrobić (czyli do czasu aż stopnie d_i lub d_j osiągną docelowe wartości)²

²Algorytm ten ma pewne subtelności, opisany jest dokładnie w dodatku do [Li et al., 2005]



Graf s -max

- Przy zadanym $\mathbf{D}$ istnieje graf maksymalizujący miarę s
- Graf ten będziemy nazywać $s_{\max}$ dla danego $\mathbf{D}$
- Istnieje efektywny algorytm konstrukcji $s_{\max}$ oparty o strategię zachłanną:
 - Skonstruuj listę wszystkich możliwych krawędzi w G sortując ją malejąco za względu na $d_i d_j$
 - Następnie dodawaj po kolei krawędzie do grafu, o ile da się to zrobić (czyli do czasu aż stopnie d_i lub d_j osiągną docelowe wartości)²

²Algorytm ten ma pewne subtelności, opisany jest dokładnie w dodatku do [Li et al., 2005]



Graf s-max

- Przy zadanym $\mathbf{D}$ istnieje graf maksymalizujący miarę s
- Graf ten będziemy nazywać s_{max} dla danego $\mathbf{D}$
- Istnieje efektywny algorytm konstrukcji s_{max} oparty o strategię zachłanną:
 - Skonstruuj listę wszystkich możliwych krawędzi w G sortując ją malejąco za względu na $d_i d_j$
 - Następnie dodawaj po kolei krawędzie do grafu, o ile da się to zrobić (czyli do czasu aż stopnie d_i lub d_j osiągną docelowe wartości)²

²Algorytm ten ma pewne subtelności, opisany jest dokładnie w dodatku do
[Li *et al.*, 2005]



Graf s-max

- Przy zadanym $\mathbf{D}$ istnieje graf maksymalizujący miarę s
- Graf ten będziemy nazywać s_{max} dla danego $\mathbf{D}$
- Istnieje efektywny algorytm konstrukcji s_{max} oparty o strategię zachłanną:
 - Skonstruuj listę wszystkich możliwych krawędzi w G sortując ją malejąco za względu na $d_i d_j$
 - Następnie dodawaj po kolei krawędzie do grafu, o ile da się to zrobić (czyli do czasu aż stopnie d_i lub d_j osiągną docelowe wartości)²

²Algorytm ten ma pewne subtelności, opisany jest dokładnie w dodatku do
[Li et al. , 2005]



Graf s-max

- Przy zadanym $\mathbf{D}$ istnieje graf maksymalizujący miarę s
- Graf ten będziemy nazywać s_{max} dla danego $\mathbf{D}$
- Istnieje efektywny algorytm konstrukcji s_{max} oparty o strategię zachłanną:
 - Skonstruuj listę wszystkich możliwych krawędzi w G sortując ją malejąco za względu na $d_i d_j$
 - Następnie dodawaj po kolei krawędzie do grafu, o ile da się to zrobić (czyli do czasu aż stopnie d_i lub d_j osiągną docelowe wartości)²

²Algorytm ten ma pewne subtelności, opisany jest dokładnie w dodatku do
[Li et al. , 2005]



Graf $s_{\max}$

- W grafie $s_{\max}$ węzły o wysokich stopniach łączą się z innymi węzłami o wysokich stopniach, co tworzy silnie scentralizowaną strukturę hubów podatną na kierowane ataki, zaś dość odporną na losowy atak (*robust yet fragile*) przypisywaną sieciom bezskalowym
- Znając wartość $s_{\max}$ możemy dla każdego grafu ocenić jak bardzo jest "bezskalowy"
- Są strategie konstrukcji grafów o niskim $s_{\max}$. Jak się okazuje, pomimo iż np. spełniają one prawo potęgowe, mają całkowicie inne własności strukturalne niż te spotykane w grafach "bezskalowych" !
- W szczególności istnieją uzasadnione podejrzenia iż struktura Internetu na poziomie routerów ma relatywnie niską s -miarę.



Graf $s_{\max}$

- W grafie $s_{\max}$ węzły o wysokich stopniach łączą się z innymi węzłami o wysokich stopniach, co tworzy silnie scentralizowaną strukturę hubów podatną na kierowane ataki, zaś dość odporną na losowy atak (*robust yet fragile*) przypisywaną sieciom bezskalowym
- Znając wartość $s_{\max}$ możemy dla każdego grafu ocenić jak bardzo jest "bezskalowy"
- Są strategie konstrukcji grafów o niskim $s_{\max}$. Jak się okazuje, pomimo iż np. spełniają one prawo potęgowe, mają całkowicie inne własności strukturalne niż te spotykane w grafach "bezskalowych" !
- W szczególności istnieją uzasadnione podejrzenia iż struktura Internetu na poziomie routerów ma relatywnie niską s -miarę.



Graf $s_{\max}$

- W grafie $s_{\max}$ węzły o wysokich stopniach łączą się z innymi węzłami o wysokich stopniach, co tworzy silnie scentralizowaną strukturę hubów podatną na kierowane ataki, zaś dość odporną na losowy atak (*robust yet fragile*) przypisywaną sieciom bezskalowym
- Znając wartość $s_{\max}$ możemy dla każdego grafu ocenić jak bardzo jest "bezskalowy"
- Są strategie konstrukcji grafów o niskim $s_{\max}$. Jak się okazuje, pomimo iż np. spełniają one prawo potęgowe, mają całkowicie inne własności strukturalne niż te spotykane w grafach "bezskalowych" !
- W szczególności istnieją uzasadnione podejrzenia iż struktura Internetu na poziomie routerów ma relatywnie niską s -miarę.



Graf $s_{\max}$

- W grafie $s_{\max}$ węzły o wysokich stopniach łączą się z innymi węzłami o wysokich stopniach, co tworzy silnie scentralizowaną strukturę hubów podatną na kierowane ataki, zaś dość odporną na losowy atak (*robust yet fragile*) przypisywaną sieciom bezskalowym
- Znając wartość $s_{\max}$ możemy dla każdego grafu ocenić jak bardzo jest "bezskalowy"
- Są strategie konstrukcji grafów o niskim $s_{\max}$. Jak się okazuje, pomimo iż np. spełniają one prawo potęgowe, mają całkowicie inne własności strukturalne niż te spotykane w grafach "bezskalowych" !
- W szczególności istnieją uzasadnione podejrzenia iż struktura Internetu na poziomie routerów ma relatywnie niską s -miarę.



S-miara jako prawdopodobieństwo

- Powróćmy na chwilę do modelu GRG i przestrzeni $G(\mathbf{D})$.
Mamy $G_{fix}(\mathbf{D}) \subset G(\mathbf{D})$, zatem $G(\mathbf{D})$ indukuje miarę probabilistyczną na $G_{fix}(\mathbf{D})$.
- Możemy tą miarę uwarunkować od przynależności $G_{fix}(\mathbf{D})$, w rezultacie dostajemy miarę na tym zbiorze naturalnie indukowaną przez GRG.
- Następnie zadajemy pytanie, czy losowy graf wybrany z $G_{fix}(\mathbf{D})$ z prawdopodobieństwem indukowanym przez $G(\mathbf{D})$ będzie miał wysoką s-miara ?



S-miara jako prawdopodobieństwo

- Powróćmy na chwilę do modelu GRG i przestrzeni $G(\mathbf{D})$.
Mamy $G_{fix}(\mathbf{D}) \subset G(\mathbf{D})$, zatem $G(\mathbf{D})$ indukuje miarę probabilistyczną na $G_{fix}(\mathbf{D})$.
- Możemy tą miarę uwarunkować od przynależności $G_{fix}(\mathbf{D})$, w rezultacie dostajemy miarę na tym zbiorze naturalnie indukowaną przez GRG.
- Następnie zadajemy pytanie, czy losowy graf wybrany z $G_{fix}(\mathbf{D})$ z prawdopodobieństwem indukowanym przez $G(\mathbf{D})$ będzie miał wysoką s-miara ?



S-miara jako prawdopodobieństwo

- Powróćmy na chwilę do modelu GRG i przestrzeni $G(\mathbf{D})$.
Mamy $G_{fix}(\mathbf{D}) \subset G(\mathbf{D})$, zatem $G(\mathbf{D})$ indukuje miarę probabilistyczną na $G_{fix}(\mathbf{D})$.
- Możemy tą miarę uwarunkować od przynależności $G_{fix}(\mathbf{D})$, w rezultacie dostajemy miarę na tym zbiorze naturalnie indukowaną przez GRG.
- Następnie zadajemy pytanie, czy losowy graf wybrany z $G_{fix}(\mathbf{D})$ z prawdopodobieństwem indukowanym przez $G(\mathbf{D})$ będzie miał wysoką s-miarę ?



S-miara jako prawdopodobieństwo

Dla przejrzystości oznaczeń ustalmy $\mathbf{w} = \mathbf{D}$. Będziemy używać $\mathbf{w}$ w kontekście oczekiwanych stopni a $\mathbf{D}$ w kontekście danej konkretnej sekwencji stopni. Dla konkretnego grafu $G = (V, E)$ o sekwencji stopni $\mathbf{D}$ mamy:

$$P(G) = \prod_{(i,j) \in E} w_i w_j s \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (26)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (27)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \frac{\prod_{i,j \in V} (1 - w_i w_j s)}{\prod_{(i,j) \in E} (1 - w_i w_j s)} \quad (28)$$



S-miara jako prawdopodobieństwo

Dla przejrzystości oznaczeń ustalmy $\mathbf{w} = \mathbf{D}$. Będziemy używać $\mathbf{w}$ w kontekście oczekiwanych stopni a $\mathbf{D}$ w kontekście danej konkretnej sekwencji stopni. Dla konkretnego grafu $G = (V, E)$ o sekwencji stopni $\mathbf{D}$ mamy:

$$P(G) = \prod_{(i,j) \in E} w_i w_j s \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (26)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (27)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \frac{\prod_{i,j \in V} (1 - w_i w_j s)}{\prod_{(i,j) \in E} (1 - w_i w_j s)} \quad (28)$$



S-miara jako prawdopodobieństwo

Dla przejrzystości oznaczeń ustalmy $\mathbf{w} = \mathbf{D}$. Będziemy używać $\mathbf{w}$ w kontekście oczekiwanych stopni a $\mathbf{D}$ w kontekście danej konkretnej sekwencji stopni. Dla konkretnego grafu $G = (V, E)$ o sekwencji stopni $\mathbf{D}$ mamy:

$$P(G) = \prod_{(i,j) \in E} w_i w_j s \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (26)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (27)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \frac{\prod_{i,j \in V} (1 - w_i w_j s)}{\prod_{(i,j) \in E} (1 - w_i w_j s)} \quad (28)$$



S-miara jako prawdopodobieństwo

Dla przejrzystości oznaczeń ustalmy $\mathbf{w} = \mathbf{D}$. Będziemy używać $\mathbf{w}$ w kontekście oczekiwanych stopni a $\mathbf{D}$ w kontekście danej konkretnej sekwencji stopni. Dla konkretnego grafu $G = (V, E)$ o sekwencji stopni $\mathbf{D}$ mamy:

$$P(G) = \prod_{(i,j) \in E} w_i w_j s \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (26)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (27)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \frac{\prod_{i,j \in V} (1 - w_i w_j s)}{\prod_{(i,j) \in E} (1 - w_i w_j s)} \quad (28)$$



S-miara jako prawdopodobieństwo

Dla przejrzystości oznaczeń ustalmy $\mathbf{w} = \mathbf{D}$. Będziemy używać $\mathbf{w}$ w kontekście oczekiwanych stopni a $\mathbf{D}$ w kontekście danej konkretnej sekwencji stopni. Dla konkretnego grafu $G = (V, E)$ o sekwencji stopni $\mathbf{D}$ mamy:

$$P(G) = \prod_{(i,j) \in E} w_i w_j s \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (26)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \prod_{(i,j) \notin E} (1 - w_i w_j s) = \quad (27)$$

$$= s^{(2 \sum_i d_i)} \prod_{i \in V} w_i^{w_i} \frac{\prod_{i,j \in V} (1 - w_i w_j s)}{\prod_{(i,j) \in E} (1 - w_i w_j s)} \quad (28)$$



S-miara jako prawdopodobieństwo

Logarytmując dostajemy:

$$\begin{aligned}\log P(G) = & 2 \sum_i d_i \log s + \sum_{i \in V} w_i \log w_i + \\ & + \sum_{i,j \in V} \log(1 - w_i w_j s) - \sum_{(i,j) \in E} \log(1 - w_i w_j s)\end{aligned}$$

Ponieważ dla G mamy $w_i = d_i$ możemy zdefiniować

$$\kappa = 2 \sum_i d_i \log s + \sum_{i \in V} d_i \log d_i + \sum_{i,j \in V} \log(1 - d_i d_j s)$$

Dla ustalonego $\mathbf{D}$ κ jest stałe.



S-miara jako prawdopodobieństwo

Logarytmując dostajemy:

$$\begin{aligned}\log P(G) = & 2 \sum_i d_i \log s + \sum_{i \in V} w_i \log w_i + \\ & + \sum_{i,j \in V} \log(1 - w_i w_j s) - \sum_{(i,j) \in E} \log(1 - w_i w_j s)\end{aligned}$$

Ponieważ dla G mamy $w_i = d_i$ możemy zdefiniować

$$\kappa = 2 \sum_i d_i \log s + \sum_{i \in V} d_i \log d_i + \sum_{i,j \in V} \log(1 - d_i d_j s)$$

Dla ustalonego $\mathbf{D}$ κ jest stałe.



S-miara jako prawdopodobieństwo

Mamy zatem:

$$\log P(G) = \kappa + \sum_{(i,j) \in E} \log(1 - sd_i d_j) \quad (29)$$

Ponieważ $\log(1 - a) = a$ dla $|a| \ll 1$ zatem o ile tylko $sd_i d_j$ są małe, mamy:

$$\log P(G) \approx \kappa + \sum_{(i,j) \in E} sd_i d_j = \kappa + s \cdot \mathbf{s}(G) \quad (30)$$

Zatem grafy o wysokim $\mathbf{s}(G)$ w relacji do $s_{\max}$ są znacznie bardziej prawdopodobne w modelu GRG !



S-miara jako prawdopodobieństwo

Mamy zatem:

$$\log P(G) = \kappa + \sum_{(i,j) \in E} \log(1 - sd_i d_j) \quad (29)$$

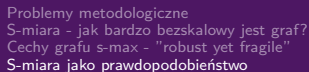
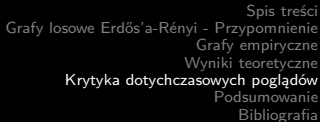
Ponieważ $\log(1 - a) = a$ dla $|a| \ll 1$ zatem o ile tylko $sd_i d_j$ są małe, mamy:

$$\log P(G) \approx \kappa + \sum_{(i,j) \in E} sd_i d_j = \kappa + s \cdot \mathbf{s}(g) \quad (30)$$

Zatem grafy o wysokim $\mathbf{s}(G)$ w relacji do s_{max} są znacznie bardziej prawdopodobne w modelu GRG !



- Przypomnijmy algorytm tworzenia grafu $s_{\max}$ który dodawał krawędzie w kolejności wynikającej z docelowych stopni wierzchołków
- Kiedy przyjrzymy się temu procesowi bliżej zauważymy, iż jest to deterministyczna wersja preferencyjnego dołączania, w której z góry wiadomo jaki graf ma być rezultatem
- Odwracając rozumowanie, model Barabási-Albert z olbrzymim prawdopodobieństwem wyprodukuje graf o dużym $s(G)$ w relacji do $s_{\max}$!
- Pojawia się zatem wyjaśnienie ogólnie panujących wierzeń: grafy spełniające prawo potęgowe losowane z dwóch najbardziej popularnych modeli losowych z dużym prawdopodobieństwem mają cechy strukturalne odpowiadające $s_{\max}$ (huby itp)! Cechy te jednak nie wynikają bezpośrednio z prawa potęgowego!



- Przypomnijmy algorytm tworzenia grafu s_{max} który dodawał krawędzie w kolejności wynikającej z docelowych stopni wierzchołków
- Kiedy przypatrzymy się temu procesowi bliżej zauważymy, iż jest to deterministyczna wersja preferencyjnego dołączania, w której z góry wiadomo jaki graf ma być rezultatem
- Odwracając rozumowanie, model Barabási-Albert z olbrzymim prawdopodobieństwem wyprodukuje graf o dużym $s(G)$ w relacji do s_{max} !
- Pojawia się zatem wyjaśnienie ogólnie panujących wierzeń: grafy spełniające prawo potęgowe losowane z dwóch najbardziej popularnych modeli losowych z dużym prawdopodobieństwem mają cechy strukturalne odpowiadające s_{max} (huby itp)! Cechy te jednak nie wynikają bezpośrednio z prawa potęgowego!



- Przypomnijmy algorytm tworzenia grafu $s_{\max}$ który dodawał krawędzie w kolejności wynikającej z docelowych stopni wierzchołków
- Kiedy przyjrzymy się temu procesowi bliżej zauważymy, iż jest to deterministyczna wersja preferencyjnego dołączania, w której z góry wiadomo jaki graf ma być rezultatem
- Odwracając rozumowanie, model Barabási-Albert z olbrzymim prawdopodobieństwem wyprodukuje graf o dużym $s(G)$ w relacji do $s_{\max}$!
- Pojawia się zatem wyjaśnienie ogólnie panujących wierzeń: grafy spełniające prawo potęgowe losowane z dwóch najbardziej popularnych modeli losowych z dużym prawdopodobieństwem mają cechy strukturalne odpowiadające $s_{\max}$ (huby itp)! Cechy te jednak nie wynikają bezpośrednio z prawa potęgowego!



- Przypomnijmy algorytm tworzenia grafu $s_{\max}$ który dodawał krawędzie w kolejności wynikającej z docelowych stopni wierzchołków
- Kiedy przyjrzymy się temu procesowi bliżej zauważymy, iż jest to deterministyczna wersja preferencyjnego dołączania, w której z góry wiadomo jaki graf ma być rezultatem
- Odwracając rozumowanie, model Barabási-Albert z olbrzymim prawdopodobieństwem wyprodukuje graf o dużym $s(G)$ w relacji do $s_{\max}$!
- Pojawia się zatem wyjaśnienie ogólnie panujących wierzeń: grafy spełniające prawo potęgowe losowane z dwóch najbardziej popularnych modeli losowych z dużym prawdopodobieństwem mają cechy strukturalne odpowiadające $s_{\max}$ (huby itp)! Cechy te jednak nie wynikają bezpośrednio z prawa potęgowego!



Podsumowanie

- Ścisła teoria sieci bezskalowych dopiero czeka na sformułowanie
- W trakcie badań popełniono pewne błędy i zapewne wiele innych zostanie jeszcze popełnionych
- Dziedzina jest trudna do okiełznania a narzędzia teoretyczne stosowane przebiegają od kombinatoryki, analizy, przez mechanikę statystyczną do rachunku prawdopodobieństwa...
- Z tego względu jest to ciekawe pole badań...



Podsumowanie

- Ścisła teoria sieci bezskalowych dopiero czeka na sformułowanie
- W trakcie badań popełniono pewne błędy i zapewne wiele innych zostanie jeszcze popełnionych
- Dziedzina jest trudna do okiełznania a narzędzia teoretyczne stosowane przebiegają od kombinatoryki, analizy, przez mechanikę statystyczną do rachunku prawdopodobieństwa...
- Z tego względu jest to ciekawe pole badań...



Podsumowanie

- Ścisła teoria sieci bezskalowych dopiero czeka na sformułowanie
- W trakcie badań popełniono pewne błędy i zapewne wiele innych zostanie jeszcze popełnionych
- Dziedzina jest trudna do okiełznania a narzędzia teoretyczne stosowane przebiegają od kombinatoryki, analizy, przez mechanikę statystyczną do rachunku prawdopodobieństwa...
- Z tego względu jest to ciekawe pole badań...



Podsumowanie

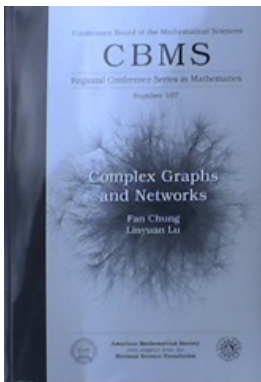
- Ścisła teoria sieci bezskalowych dopiero czeka na sformułowanie
- W trakcie badań popełniono pewne błędy i zapewne wiele innych zostanie jeszcze popełnionych
- Dziedzina jest trudna do okiełznania a narzędzia teoretyczne stosowane przebiegają od kombinatoryki, analizy, przez mechanikę statystyczną do rachunku prawdopodobieństwa...
- Z tego względu jest to ciekawe pole badań...



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia



Complex Graphs and Networks



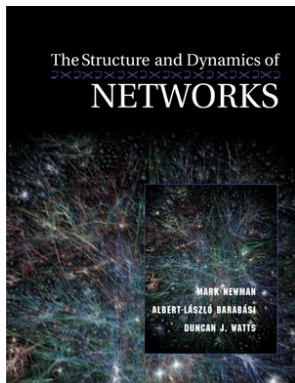
Linyuan Lu i Fan Chung,
American Mathematical Society
(August 28, 2006)



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia



The Structure and Dynamics of Networks



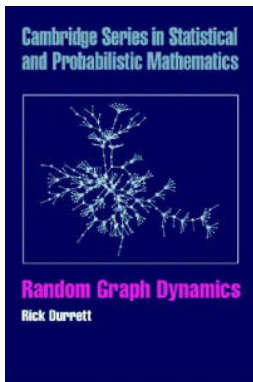
Mark Newman, Albert-László Barabási, Duncan J. Watts,
Princeton University Press; 1
edition (April 17, 2006)



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia



Random Graph Dynamics



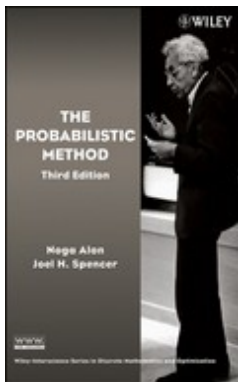
Rick Durrett,
Cambridge University Press; 1
edition (October 23, 2006))



Spis treści
Grafy losowe Erdős'a-Rényi - Przypomnienie
Grafy empiryczne
Wyniki teoretyczne
Krytyka dotychczasowych poglądów
Podsumowanie
Bibliografia



The Probabilistic Method



Noga Alon, Joel H. Spencer,
Wiley-Interscience; 3 edition
(August 11, 2008)



ABELLO, JAMES, BUCHSBAUM, ADAM, & WESTBROOK, JEFFERY. 1998.

A functional approach to external graph algorithms.

Esa '98: Proceedings of the 6th annual european symposium on algorithms, 332–343.

Dostępne na: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-68530-8_28.



AIELLO, WILLIAM, CHUNG, FAN, & LU, LINYUAN. 2000.

A random graph model for massive graphs.

Pages 171–180 of: Stoc '00: Proceedings of the thirty-second annual acm symposium on theory of computing.

New York, NY, USA: ACM.

doi:<http://doi.acm.org/10.1145/335305.335326>.



ALBERT, RÉKA, & BARABÁSI, ALBERT-LÁSZLÓ. 2002.

Statistical mechanics of complex networks.

Reviews of modern physics, 74, 47.

Dostępne na: <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:cond-mat/0106096>.



ALBERT, RÉKA, JEONG, HAWOONG, & BARABÁSI, ALBERT-LÁSZLÓ. 1999.

Diameter of the world-wide web.

Science, 401(Septmeber), 130–131.



ALBERT, REKA, JEONG, HAWOONG, & BARABASI, ALBERT-LASZLO. 2000.

Error and attack tolerance of complex networks.

Nature, 406, 378.

Dostępne na: <http://www.citebase.org/abstract?id=oai:arXiv.org:cond-mat/0008064>.



BARABÁSI, ALBERT-LÁSZLÓ, & ALBERT, RÉKA. 1999.

Emergence of scaling in random networks.



Science, October, 509–512.



BARABÁSI, ALBERT-LÁSZLÓ, JEONG, HAWOONG, NÉDA, ZOLTAN, RAVASZ, ERZSEBET, SCHUBERT, A., & VICSEK, TAMAS. 2002.
Evolution of the social network of scientific collaborations.
Physica a, **311**(4), 590–614.



BHALLA, UPINDER S., & IYENGAR, RAVI. 1999.
Emergent properties of networks of biological signaling pathways.
Science, **283**(5400), 381–387.
Dostępne na: <http://dx.doi.org/10.1126/science.283.5400.381>,
<http://dx.doi.org/10.1126/science.283.5400.381> doi:10.1126/science.283.5400.381.



CHUNG, FAN, & LU, LINYUAN. 2006.
Complex graphs and networks (cbms regional conference series in mathematics).
Boston, MA, USA: American Mathematical Society.



ERDŐS, P., & GALLAI, T. 1960.
Graphs with prescribed degrees of vertices (hungarian).
Mat. lapok, **11**, 264–274.



ERDŐS, PAUL, & RÉNYI, ALFRED. 1959.
On random graphs. i.
Publicationes mathematicae, **6**, 290–297.



ERDŐS, PAUL, & RÉNYI, ALFRED. 1960.
The evolution of random graphs.
Magyar tud. akad. mat. kutató int. közl., **5**, 17–61.



FALOUTSOS, MICHALIS, FALOUTSOS, PETROS, & FALOUTSOS, CHRISTOS. 1999.

On power-law relationships of the internet topology.

Pages 251–262 of: Sigcomm '99: Proceedings of the conference on applications, technologies, architectures, and protocols for computer communication.

New York, NY, USA: ACM.

doi:<http://doi.acm.org/10.1145/316188.316229>.



I CANCHO, RAMON FERRER, & SOLÉ, RICARD V. 2001.

The small-world of human language.

Proceedings of the royal society of london b, **268**(1482), 2261–2265.



JEONG, HAWOONG, TOMBOR, B., ALBERT, RÉKA, OLTVAI, ZOLTAN N., & BARABÁSI, ALBERT-LÁSZLÓ. 2000.

The large-scale organization of metabolic networks.

Nature, **407**(6804), 651–653.



LI, LUN, ALDERSON, DAVID, TANAKA, REIKO, DOYLE, JOHN C., & WILLINGER, WALTER. 2005 (Oct).

Towards a theory of scale-free graphs: Definition, properties, and implications (extended version).

Dostępne na: <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0501169>, <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0501169>
arXiv:cond-mat/0501169.



LOTKA, ALFRED J. 1926.

The frequency distribution of scientific productivity.

Journal of the washington academy of sciences, **16**(12), 317–323.



MONTAYA, JOSE M., & V., RICARD V. SOLÉ. 2002.

Small world patterns in food webs.

Journal of theoretical biology, **214**(3), 405–412.



REDNER, S. 1998.

How popular is your paper? an empirical study of the citation distribution.
European physical journal b, 4(2), 131–134.



SIMON, HERBERT A. 1955.

On a class of skew distribution functions.
Biometrika, 42, 425–440.

Dostępne na: <http://dx.doi.org/doi:10.1093/biomet/42.3-4.425>,
<http://dx.doi.org/doi:10.1093/biomet/42.3-4.425> doi:doi:10.1093/biomet/42.3-4.425.



TRAVERS, JEFFREY, & MILGRAM, STANLEY. 1969.

An experimental study of the small world problem.
Sociometry, 32(4), 425–443.

Dostępne na: <http://www.jstor.org/stable/2786545>.



WATTS, DUNCAN J., & STROGATZ, STEVEN H. 1998.

Collective dynamics of small-world networks.
Nature, June, 440–442.



ZIPF, GK. 1932.

Selective studies and the principle of relative frequency in language.
Pages 3544–3557 of: lcslp96: Fourth international conference on spoken language processing.